Capítulo VI

LA INTEGRAL DEFINIDA DE FUNCIONES REALES

CAPÍTULO VI

LA INTEGRAL DEFINIDA DE FUNCIONES REALES

CONTENIDO

6.1. Génesis de la integral definida. La integral definida.

6.2. Teoremas fundamentales del cálculo.

6.3. Propiedades de la integral definida.

6.4. Integral definida y área de regiones bajo una curva.

6.5. Integral definida y área entre curvas.

6.6. Integral definida y el volumen por secciones planas conocidas.

6.7. Integral definida y el volumen de sólidos de revolución.

6.8. Integral definida y la longitud de arco de una curva.

6.9. Integral definida y centro de gravedad de una región plana.

6.10. Integral definida y el área de superficies de revolución.

6.11. Integral definida y el valor medio de una función real.

6.12. Integral definida y el trabajo realizado por una fuerza.

6.13. Integral definida en otras aplicaciones.

6.14. Lista de ejercicios propuestos.

6.1. GÉNESIS DE LA INTEGRAL DEFINIDA. LA INTEGRAL DEFINIDA

Recordar que la *integral indefinida* da como resultado, en general, una familia de funciones de la forma $y = F(x) + C$ (cada constante de integración C corresponde a una función particular).

La *integral definida* dará como resultado un valor real; el cual se obtiene evaluando en la primitiva los valores límites de integración, tal como será sustentado por el segundo teorema fundamental del cálculo integral.

Antes de dar la definición exacta, a manera de introducción, veamos un problema para calcular el área bajo una curva.

a) Primero de forma aproximada, haciendo particiones en el intervalo dominio.

b) Luego de forma exacta, afinando la partición y aplicando límites.

PROBLEMA. Hallar el área comprendida entre la curva dada por la función real $y = x^2$, la recta $x = 3$ y el eje X.

a) Solución aproximada.

i) Dividimos el intervalo $I = [0; 3]$ en seis subintervalos de tamaño $\frac{1}{2}$ unidad de longitud.

ii) Sobre cada intervalo de base $\frac{1}{2}$ se construye un rectángulo de altura, dada por la ordenada de $y = x^2$ tomada en el punto medio de la base. (Ver Figura 6.1).

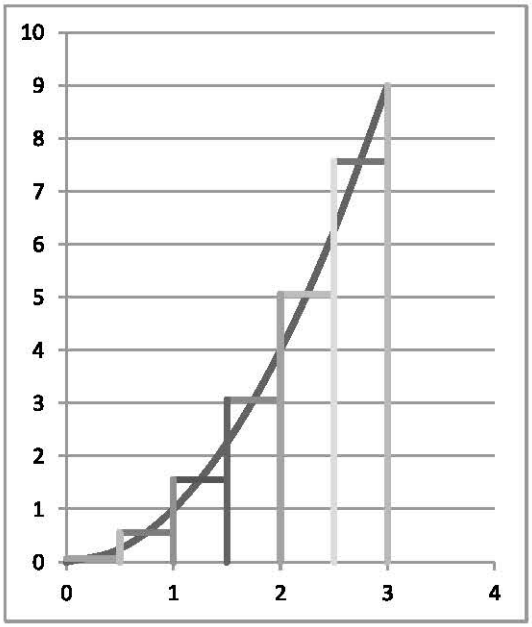

Figura 6.1

iii) El área de los seis rectángulos que *aproxima el área de la región* será la siguiente:

$$A=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{7}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{11}{4}\right)^2=\frac{286}{32}=\frac{143}{16}=8{,}9375\ unid^2.$$

b) Solución exacta.

i) Dividimos el intervalo $I=[0;3]$ en n intervalos más pequeños, haciendo una partición que será dada por el conjunto de puntos $P=\{0=x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{i-1},x_i,\dots x_{n-1},x_n=3\}$

ii) Los n intervalos serán $[x_0,x_1]$, $[x_1,x_2]$, $[x_2,x_3]$, … , $[x_{i-1},x_i]$, … , $[x_{n-1},x_n]$

iii) Elegimos un intervalo típico que será identificado por $[x_{i-1},x_i]$

iv) Las sumas que se presentan en seguida se conocen como las sumas de Riemann.

El área *sobreestimada* (área con exceso) o suma superior será la siguiente:

$$\bar{A}_n=(x_1-x_0)x_1^2+(x_2-x_1)x_2^2+\cdots+(x_i-x_{i-1})x_i^2+\cdots+(x_n-x_{n-1})x_n^2\,.$$

$$\bar{A}_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(x_i)\,.$$

El área *subestimada* (área con déficit) o suma inferior será como sigue:

$$\underline{A}_n=(x_1-x_0)x_0^2+(x_2-x_1)x_1^2+\cdots+(x_i-x_{i-1})x_{i-1}^2+\cdots+(x_n-x_{n-1})x_{n-1}^2\,.$$

$$\underline{A}_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})f(x_{i-1})\,.$$

v) Considerando el intervalo $I=[0;b]$ y dividiéndolo en n subintervalos de igual magnitud, cada uno mide $\frac{b-0}{n}=\frac{b}{n}$, luego $(x_1-x_0)=(x_2-x_1)=\dots=(x_n-x_{n-1})=\frac{b}{n}$

Los puntos de subdivisión serán $x_0=0$, $x_1=\frac{b}{n}$, $x_2=\frac{2b}{n}$, $x_3=\frac{3b}{n}$, …, $x_i=\frac{ib}{n}$, …, $x_n=b$

Al hacer uso de los puntos de subdivisión, el área *sobreestimada* se transforma en

$$\bar{A}_n=\frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^2+\frac{b}{n}\left(\frac{2b}{n}\right)^2+\frac{b}{n}\left(\frac{3b}{n}\right)^2+\dots+\frac{b}{n}\left(\frac{ib}{n}\right)^2+\dots+\frac{b}{n}(b)^2$$

$$\bar{A}_n=\frac{b^3}{n^3}+\frac{4b^3}{n^3}+\frac{9b^3}{n^3}+\dots+\frac{i^3b^3}{n^3}+\dots+\frac{b^3}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2}=\frac{b^3}{n^3}(1^2+2^2+3^2+\cdots+i^2+\cdots+n^2)$$

$$\bar{A}_n=\frac{b^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{b^3}{n^3}\cdot\left(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\right)=\frac{b^3}{3}+\frac{b^3}{2n}+\frac{b^3}{6n^2}$$

$$\bar{A}_n=\frac{b^3}{3}+\frac{b^3}{2n}+\frac{b^3}{6n^2}.$$

Usando los puntos de subdivisión, el área *subestimada* se transforma en

$$\underline{A}_n=\frac{b}{n}(0)^2+\frac{b}{n}\left(\frac{b}{n}\right)^2+\frac{b}{n}\left(\frac{2b}{n}\right)^2+\dots+\frac{b}{n}\left(\frac{(i-1)b}{n}\right)^2+\dots+\frac{b}{n}\left(\frac{(n-1)b}{n}\right)^2$$

$$\underline{A}_n=\frac{b^3}{n^3}+\frac{4b^3}{n^3}+\frac{9b^3}{n^3}+\dots+\frac{(i-1)^3b^3}{n^3}+\dots+\frac{(n-1)^2b^3}{n}=\frac{b^3}{n^3}(1^2+2^2+\cdots+(i-1)^2+\cdots+(n-1)^2)$$

$$\underline{A_n} = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} = \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{b^3}{n^3} \cdot \left(\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) = \frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2n} + \frac{b^3}{6n^2}$$

$$\underline{A_n} = \frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2n} + \frac{b^3}{6n^2}.$$

Aplicando límite cuando $n \to \infty$ al área subestimada, se obtiene el área verdadera:

$$A = \lim_{n\to\infty} \underline{A_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^3}{2n} + \frac{b^3}{6n^2}\right) = \frac{b^3}{3}$$

Al aplicar el límite cuando $n \to \infty$ al área sobreestimada, se obtiene el área verdadera:

$$A = \lim_{n\to\infty} \bar{A}_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b^3}{3} + \frac{b^3}{2n} + \frac{b^3}{6n^2}\right) = \frac{b^3}{3}$$

Es decir, ambos límites coinciden y dan como resultado la misma área verdadera: $A = \frac{b^3}{3}$

En el problema planteado $b = 3$, entonces el área exacta es $A = \frac{b^3}{3} = \frac{3^3}{3} = 9\ unid^2$.

OBSERVACIÓN. En el problema anterior observamos que aplicando límite cuando $n \to \infty$ a las sumas de Riemann, se obtiene el verdadero valor del área de la región dada.

Calcular integrales definidas mediante este proceso es un trabajo tedioso para funciones más sofisticadas; no obstante, se puede realizar. Antes bien, sin pérdida de la generalidad, este hecho permite plantear la definición de la integral definida.

DEFINICIÓN. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real y continua en un intervalo $I = [a; b]$, entonces la INTEGRAL DEFINIDA de f desde "a" hasta "b" (o desde $x = a$, hasta $x = b$) que se denota por $\int_a^b f(x)dx$, se define como el límite siguiente:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \overline{A_n} = \lim_{n\to\infty} \underline{A_n}$$

Donde $\overline{A_n}$ y $\underline{A_n}$ son en general las sumas de Riemann superior e inferior, respectivamente, para un intervalo $I = [a; b]$ cualquiera. El valor "a" es llamado límite inferior de integración y el valor "b", límite superior de integración.

Nota. En realidad la integral definida es una suma infinita de allí el símbolo $S \to \int$.

CONTINUIDAD – INTEGRABILIDAD.

TEOREMA. Si $f: I \subset R \to R$ es una función real y continua en un intervalo cerrado $I = [a; b]$, entonces f es integrable en I.

6.2. TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO

PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Este teorema muestra la forma de derivar una función, la cual está definida mediante una integral.

TEOREMA. Sea G una función definida por $G(x) = \int_a^x f(t)dt$. Si $f: [a; b] \to R$ es continua sobre un intervalo $I = [a; b]$ que contiene al valor "c", entonces G es diferenciable en I y la derivada es dada por $G'(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\int_c^x f(t)dt\right] = f(x)$.

Ejemplo 1. Se presenta a continuación, derivadas de funciones definidas mediante integrales:

a) $G(x) = \int_a^x Sen\ t\ dt$

La derivada es $G'(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x Sen\ t\ dt\right] = Sen\ x$.

b) $G(x) = \int_x^2 (u^2 - Ln(u) + 4)\ du = -\int_2^x (u^2 - Ln(u) + 4)\ du$

La derivada es $G'(x) = \frac{d}{dx}\left[-\int_2^x (u^2 - Ln(u) + 4)\ du\right] = -(x^2 - Ln(x) + 4)$

OBSERVACIÓN. Son consecuencia del primer teorema fundamental del cálculo integral, cuando alguno o ambos límites de integración resultan funciones.

a) Si $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f[g(x)] \cdot g'(x)$

b) Si $G(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f[g(x)] \cdot g'(x) - f[h(x)] \cdot h'(x)$

Ejemplo 2. Se muestra derivadas de funciones definidas por integrales:

a) $G(x) = \int_a^{\sqrt{x}} Cos\ t\ dt$

La derivada es $G'(x) = Cos(\sqrt{x}) \cdot [\sqrt{x}]' = Cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} Cos(\sqrt{x})$

b) $G(x) = \int_{x^2}^{x^3} \sqrt{1 - t^2}\ dt$

La derivada es $G'(x) = \sqrt{1 - (x^3)^2} \cdot [x^3]' - \sqrt{1 - (x^2)^2} \cdot [x^2]'$

$= \sqrt{1 - x^6} \cdot (3x^2) - \sqrt{1 - x^4} \cdot (2x) = 3x^2\sqrt{1 - x^6} - 2x\sqrt{1 - x^4}$

c) $G(x) = \int_{1-x^2}^{1+x^2} \left(\frac{1}{t}\right) dt$

La derivada es: $G'(x) = \frac{1}{1+x^2}[1+x^2]' - \frac{1}{1-x^2}[1-x^2]'$

$= \frac{1}{1+x^2}(2x) - \frac{1}{1-x^2}(-2x) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1-x^2} = \frac{4x}{1-x^4}$

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO INTEGRAL

Este teorema muestra la forma de evaluar una integral en sus límites de integración. Este teorema es conocido como la regla de Barrow.

TEOREMA. Sea $f: [a; b] \rightarrow R$ una función real continua en el intervalo $I = [a; b]$. Si F es diferenciable en I y si $F'(x) = f(x)$ en I, entonces se tiene que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Siendo $y = F(x)$ la antiderivada de $y = f(x)$.

OBSERVACIÓN. Primero se calcula la primitiva o integral indefinida para luego evaluar y hallar el valor de la integral definida.

Ejemplo 3. Se da a conocer ejemplos de integrales definidas:

a) $N = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9$

b) $N = \int_1^2 (3x^3 - 9x + 7)dx = \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{9x^2}{2} + 7x\right]_1^2$

$= \frac{3(2)^4}{4} - \frac{9(2)^2}{3} + 7(2) - \frac{3(1)^4}{4} + \frac{9(1)^2}{3} - 7(1) = 4{,}75$

6.3. PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

a) $\int_a^b C\, dx = C(b-a)$

b) $\int_a^b C\, f(x)dx = C \int_a^b f(x)dx$

c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx, \qquad c \in [a, b]$

d) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

e) $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

f) Si $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in [a;b] \Rightarrow \int_a f(x)dx \leq \int_a g(x)dx$

g) Si $f(x) \geq 0, \forall x \in [a;b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

h) $\int_a^a f(x)dx = 0$

i) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

j) Si f es una función par $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

k) Si f es una función impar $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x)dx = 0$

OBSERVACIÓN. Las propiedades anteriores son útiles en el cálculo de integrales porque permiten reducir el proceso de integración o porque facilitan el cálculo en ejercicios y problemas de integración. Se las usará en integrales del cálculo más avanzados como, por ejemplo, en integrales de línea, en series de Fourier o en integrales dobles.

Ejemplo 1. Se da diversos ejemplos de integral definida.

a) $N = \int_2^7 4dx = 4(7-2) = 20$

b) $N = \int_0^2 25e^{5x}dx = 25\int_0^2 e^{5x}dx = \frac{25}{5}[e^{5x}]_0^2 = 5(e^{10}-1)$

c) Véase que $N = \int_{-3}^6 \sqrt{x+3}d\,x = \int_{-3}^1 \sqrt{x+3}\,dx + \int_1^6 \sqrt{x+3}\,dx$

En efecto, en el lado izquierdo de la integral:

$$\text{CV: } u = \sqrt{x+3} \rightarrow u^2 = x+3 \rightarrow x = u^2-3 \rightarrow dx = 2u\,du$$

$$\text{Si } x = -3 \Rightarrow u = 0 \qquad \text{si } x = 6 \Rightarrow u = 3$$

$$N = \int_{-3}^6 \sqrt{x+3}\,dx = \int_0^3 u\,(2u\,du) = 2\int_0^3 u^2du = 2\left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^3 = 2\left[\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{3}(0)^3\right] = 18$$

En el lado derecho de la integral:

$$\text{CV: } u = \sqrt{x+3} \rightarrow u^2 = x+3 \rightarrow x = u^2-3 \rightarrow dx = 2u\,du$$

$$\text{Si } x = -3 \Rightarrow u = 0 \qquad \text{si } x = 1 \Rightarrow u = 2$$

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow u = 2 \qquad \text{si } x = 6 \Rightarrow u = 3$$

$$N = \int_{-3}^1 \sqrt{x+3}\,dx + \int_1^6 \sqrt{x+3}\,dx = \int_0^2 u\,(2u\,du) + \int_2^3 u\,(2u\,du) = 2\int_0^2 u^2\,du) + 2\int_2^3 u^2\,du)$$

$$= 2\left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^2 + 2\left[\frac{1}{3}u^3\right]_2^3 = 2\left[\frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{3}(0)^3\right] + 2\left[\frac{1}{3}(3)^3 - \frac{1}{3}(2)^3\right] = 2\frac{8}{3} + 2\left(9 - \frac{8}{3}\right) = 18$$

d) $N = \int_{-3}^{3}(x^2 + 2x - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x\right]_{-3}^{3} = \frac{3^3}{3} + 3^2 - 3 - \left[\frac{(-3)^3}{3} + (-3)^2 - (-3)\right]$

$= 9 + 9 - 3 - (-9 + 9 + 3) = 15 - 3 = 12$

e) $N = \int_{6}^{6}(2x + 1)\, dx = [x^2 + x]_{6}^{6} = 6^2 + 6 - 6^2 - 6 = 0$

f) Se muestra que $\int_0^{\pi} Sen\, x\, dx = -\int_{\pi}^{0} Sen\, x\, dx$

En efecto, $\int_0^{\pi} Sen\, x\, dx = [-Cos\, x]_0^{\pi} = -Cos(\pi) + Cos(0) = -(-1) + 1 = 1+1 = 2$

$$-\int_{\pi}^{0} Sen\, x\, dx = -[-Cos\, x]_{\pi}^{0} = Cos(0) - Cos(\pi) = 1 - (-1) = 1+1 = 2$$

g) $N = \int_{-4}^{4}(x^4 - x^2)dx = 2\int_0^4 (x^4 - x^2)dx = 2\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^4 = 2\left[\frac{1024}{5} - \frac{64}{3}\right] = \frac{5504}{15}$.

Aquí la función $f(x) = x^4 - x^2$ es par.

h) $N = \int_{-\pi}^{\pi} Sen(x)\, dx = 0$. Porque aquí la función $f(x) = Sen(x)$ es impar.

i) $N = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Cos(x)\, dx = 2\int_0^{\pi/2} Cos(x)\, dx = 2[Sen(\pi/2) - Sen(0)] = 2[1 - 0] = 2$. Puesto que aquí la función $f(x) = Cos(x)$ es par.

OBSERVACIÓN. Cuando una integral definida se consigue haciendo un cambio de variable, puede resolverse de dos formas, como veremos, ambas darán el mismo resultado.

Primera forma. Desarrollando la integral indefinida y regresando a la variable original, colocar los límites de integración iniciales, evaluar y hallar el resultado.

Segunda forma. Desarrollando la integral definida incluyendo el cambio de variable en los límites de integración, evaluar y hallar el resultado.

Ejemplo 2. Se muestra las dos formas de hallar una integral definida.

a) $N = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$ CV: $u = 2x - 1 \rightarrow x = \frac{u+1}{2} \rightarrow dx = \frac{du}{2}$

Primera forma. Desarrollando la integral indefinida y volviendo a la variable original para evaluar.

$N = \int \frac{(u+1)}{2}\frac{1}{u^{1/2}}\frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int\left(u^{1/2} + u^{-1/2}\right)du = \frac{1}{6}u^{3/2} + \frac{1}{2}u^{1/2}$

Volviendo a la variable original y evaluando:

$N = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx = \left[\frac{1}{6}(2x-1)^{3/2} + \frac{1}{2}(2x-1)^{1/2}\right]_1^5 = \frac{17}{3}$

Segunda forma. Incluir cambio de variable en los límites de integración.

$N = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$ CV: $u = 2x - 1 \rightarrow x = \frac{u+1}{2} \rightarrow dx = \frac{du}{2}$

Si $x = 1 \rightarrow u = 1$; si $x = 5 \rightarrow u = 9$

$$\Rightarrow N = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx = \int_1^9 \frac{(u+1)}{2}\frac{1}{u^{1/2}}\frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int_1^9 (u^{1/2} + u^{-1/2})dx = \left[\frac{1}{6}u^{3/2} + \frac{1}{2}u^{1/2}\right]_1^9 = \frac{17}{3}$$

6.4. INTEGRAL DEFINIDA Y ÁREA DE REGIONES BAJO UNA CURVA

TEOREMA. Si $f: I \rightarrow R$ es una función real continua y no negativa en el intervalo $I = [a; b]$, entonces el área de la región limitada por $y = f(x)$, el eje real X y las rectas verticales $x = a$, $x = b$ (Ver Figura 6.2) son dados por $A(D) = \int_a^b f(x)dx$

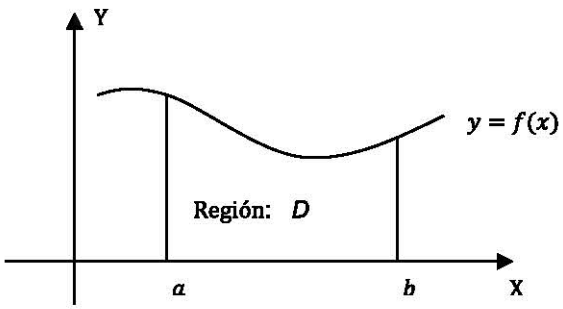

Figura 6.2

Ejemplo 1. Se presenta ejemplos del cálculo de áreas de regiones planas. En algunos casos se emplean las propiedades de la integral definida.

a) Se da el área de la región encerrada por la función $y = \sqrt{1-x}$, desde $x = -8$ hasta $x = 0$, que está por sobre el eje X.

Solución. En la Figura 6.3, se grafica la región D.

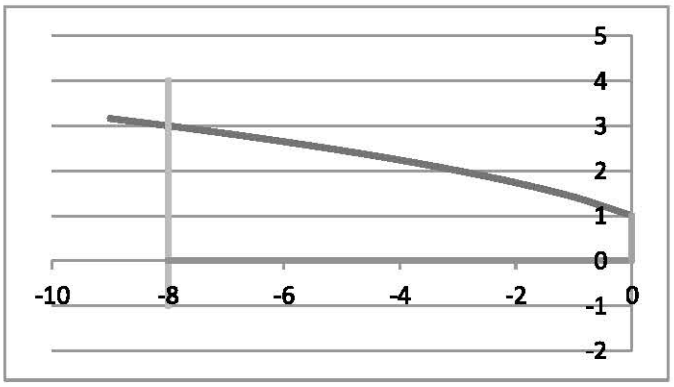

Figura 6.3

El área será dada por $A(D) = \int_a^b f(x)dx = \int_{-8}^{0} \sqrt{1-x}\, dx$

CV: $u = \sqrt{1-x} \rightarrow u^2 = 1 - x \rightarrow x = 1 - u^2 \rightarrow dx = -2u\, du$

Si $x = -8 \Rightarrow u = 3$ si $x = 0 \Rightarrow u = 1$

$$\Rightarrow (D) = \int_{-8}^{0} \sqrt{1-x}\, dx = \int_3^1 u(-2u\, du) = -2\int_3^1 u^2\, du) = -2\left[\frac{u^3}{3}\right]_3^1 = -2\left(\frac{1}{3} - \frac{3^3}{3}\right) = \frac{52}{3}\ unid^2.$$

b) Área de la región D limitada por la curva $y = x^2$, el eje X y las rectas $x = -3, x = 3$.

$A(D) = \int_{-3}^{3} x^2\, dx$, como $y = x^2$ es una función PAR,

$$A(D) = \int_{-3}^{3} x^2\, dx = 2\int_0^3 x^2\, dx = 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{2}{3}(3^3 - 0^3) = 18\ unid^2.$$

Es decir, el área es de 18 unidades cuadradas. (Ver Figura 6.4).

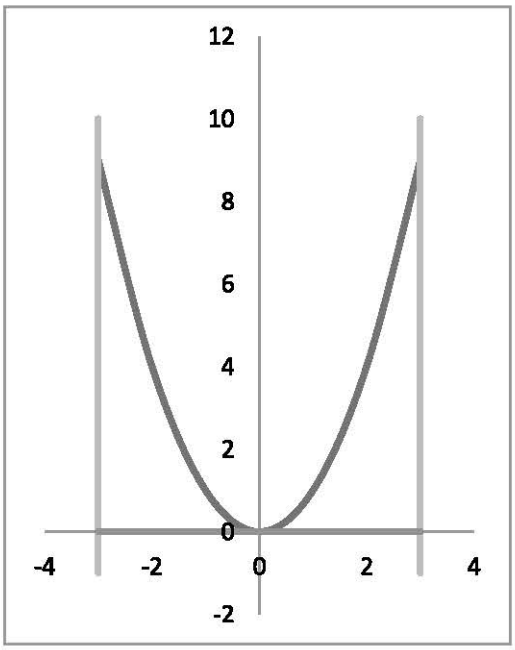

Figura 6.4

OBSERVACIÓN. Cuando la función tiene alguna parte negativa entre ella y el eje X, entonces a esta parte del área se la toma con signo cambiado.

Es decir, si se desea determinar el área de la región $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ representada en la Figura 6.5, entonces esta será dada por $A(D) = A(D_1) - A(D_2) + A(D_3)$.

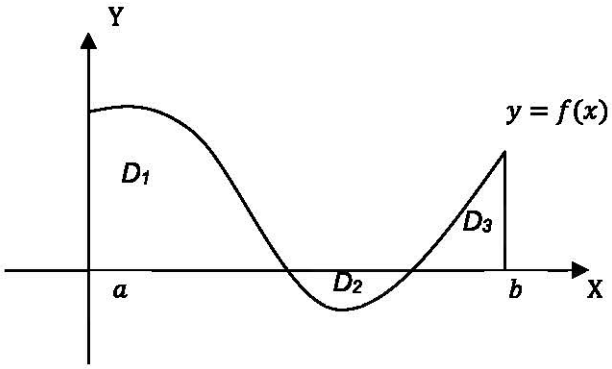

Figura 6.5

Ejemplo 2. Región D limitada por la curva $y = \sqrt[3]{x}$, el eje de la "x" y las rectas $x = -8$, $x = 8$.

Solución.

Al observar la gráfica se descubre que tiene parte de la región de integración por debajo del eje X, por cuanto el área se calcula de la siguiente manera:

$A(D) = -A(D_1) + A(D_2)$.

$$A(D) = -\int_{-8}^{0} \sqrt[3]{x}\, dx + \int_{0}^{8} \sqrt[3]{x}\, dx = -\int_{-8}^{0} x^{1/3}\, dx + \int_{0}^{8} x^{1/3}\, dx = -\left[\frac{3x^{4/3}}{4}\right]_{-8}^{0} + \left[\frac{3x^{4/3}}{4}\right]_{0}^{8} = 24.$$

En consecuencia, el área es de 24 unidades cuadradas. (Ver Figura 6.6).

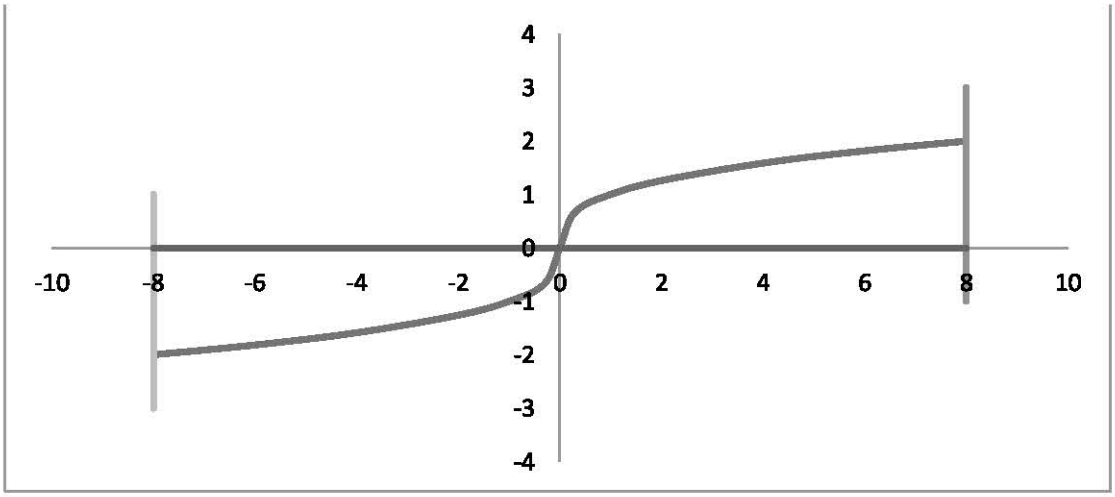

Figura 6.6

6.5. INTEGRAL DEFINIDA Y ÁREA ENTRE DOS CURVAS

DEFINICIÓN 1 (ÁREA RESPECTO AL EJE X). Sea D la región limitada por las gráficas de dos funciones continuas $y = f(x)$, $y = g(x)$, tales que para todo $x \in [a, b]$, $f(x) \geq g(x)$ y las rectas $x = a$, $x = b$, (Ver Figura 6.7) entonces:

$$A(D) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

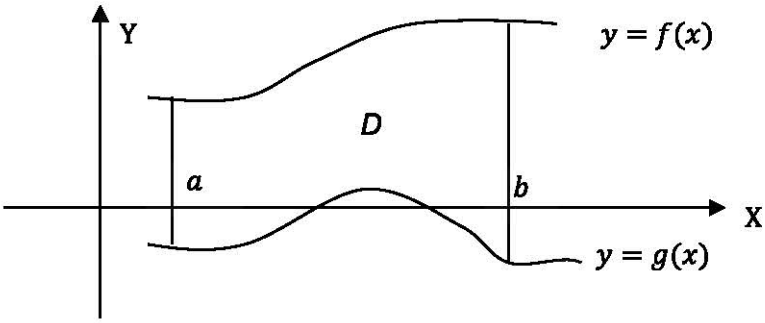

Figura 6.7

DEFINICIÓN 2 (ÁREA RESPECTO AL EJE Y). Sea D la región limitada por las gráficas de dos funciones continuas $x = F(y)$, $x = G(y)$, tales que para todo $y \in [c; d]$, $F(y) \geq G(y)$ y las rectas $y = c, y = d$, (Ver Figura 6.8) entonces:

$$A(D) = \int_c^d [F(y) - G(y)]dy.$$

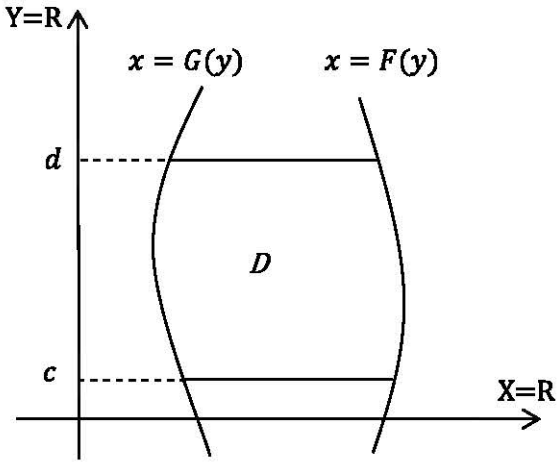

Figura 6.8

Ejemplo 1. Se muestra ejemplos donde se halla el área entre dos curvas.

a) Región D limitada por $x = 3y - y^2, x + y = 3$. (Ve Figura 6.9).

Aquí, $F(y) = 3y - y^2, G(y) = 3 - y$.

El área será $A(D) = \int_c^d [F(y) - G(y)]dy = \int_1^3 [3y - y^2 - 3 + y]dy = \int_1^3 [4y - y^2 - 3]dy$

$= \left[2y^2 - \frac{y^3}{3} - 3y\right]_1^3 = \frac{4}{3} unid^2.$

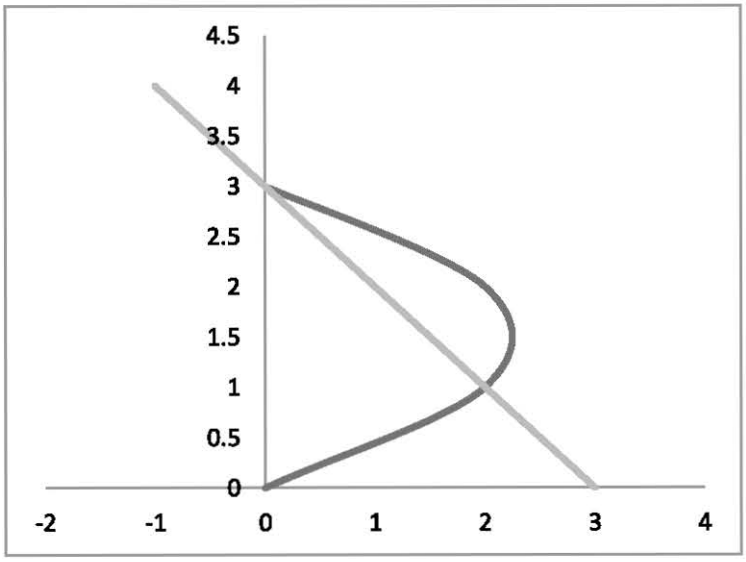

Figura 6.9

b) Región limitada por $y = e^x$ y las rectas $y = 1 + x, x = 2$. (Ver Figura 6.10).

El área será $A(D) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx = \int_0^2 [e^x - 1 - x]dx$

$= \left[e^x - x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = e^2 - 5 = 2{,}398\ unid^2.$

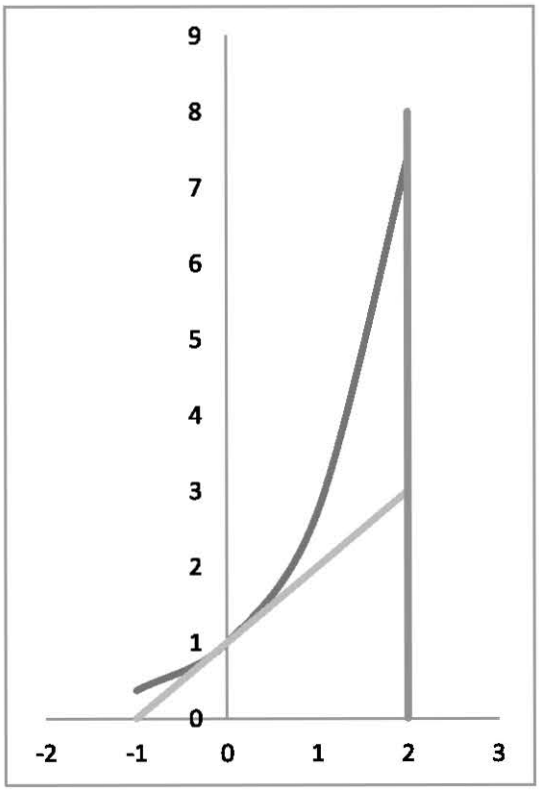

Figura 6.10

6.6. INTEGRAL DEFINIDA Y EL VOLUMEN POR SECCIONES PLANAS CONOCIDAS

EL VOLUMEN CON SECCIONES PLANAS $A(x)$. (Ver Figura 6.11).

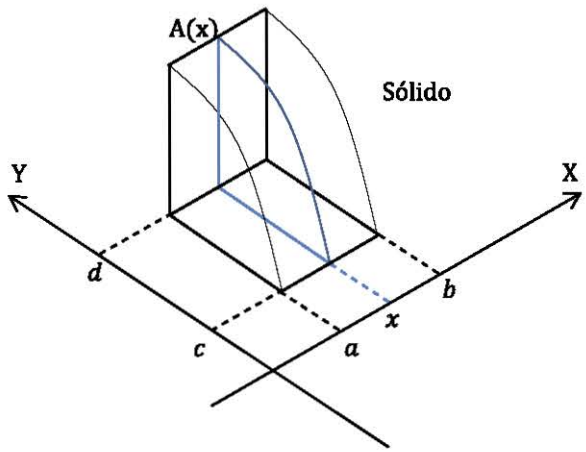

Figura 6.11

Sólido: S

Eje de proyección: X

Sección transversal: $A(x)$

Posición de $A(x)$: x

Proyección ortogonal del sólido S sobre el eje X: $[a; b]$

El volumen del sólido S es dado por $V(S) = \int_a^b A(x)dx$

EL VOLUMEN CON SECCIONES PLANAS $A(y)$. (Ver Figura 6.12).

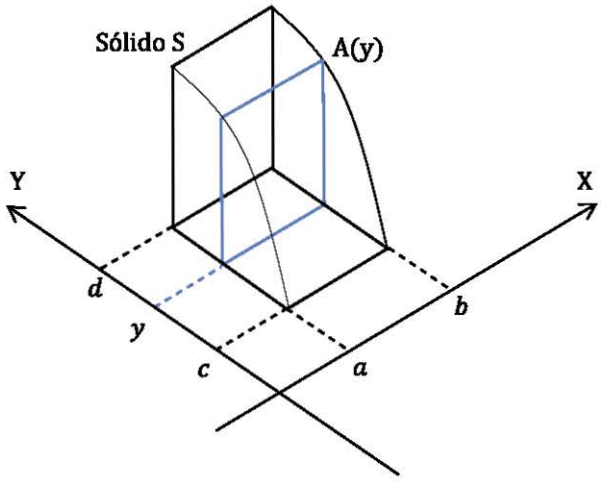

Figura 6.12

Sólido: S

Eje de proyección: Y

Sección transversal: $A(y)$

Posición de $A(y)$: y

Proyección ortogonal del sólido S sobre el eje X: $[c; d]$

El volumen del sólido S es dado por $V(S) = \int_c^d A(y)dy$

Ejemplo 1. Hallar el volumen de un tetraedro de tres caras ortogonales y tres aristas ortogonales entre sí, cuyas longitudes son a, b y c.

Solución.

La sección $A(y)$ es el área de un triángulo. La base del tetraedro es $B = \frac{ab}{2}$

Usando proporciones $\frac{A(y)}{B} = \frac{(c-y)^2}{c^2}$, donde $A(y) = \frac{ab}{2c^2}(c-y)^2$

Observemos la Figura 6.13 a fin de precisar detalles.

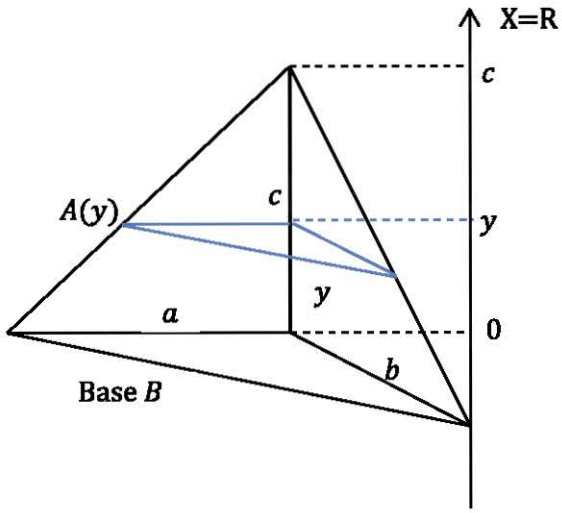

Figura 6.13

El volumen será dado por $V(S) = \int_0^c A(y)dy = \int_0^c \frac{ab}{2c^2}(c-y)^2dy = \frac{ab}{2c^2}\int_0^c (y-c)^2dy$

$$= \left[\frac{ab}{2c^2}\frac{(y-c)^3}{3}\right]_0^c = \frac{ab}{2c^2}\frac{(c-c)^3}{3} - \frac{ab}{2c^2}\frac{(0-c)^3}{3} = -\frac{ab}{2c^2}\frac{(-c)^3}{3} = \frac{abc}{6}$$

Por lo tanto, $V(S) = \frac{abc}{6}\ unid^3$.

Ejemplo 2. La base de un sólido es la región limitada por una circunferencia que tiene un radio de 7 cm. Encuentre el volumen del sólido si todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos equiláteros.

Solución.

Las figuras que se muestran a continuación permiten ubicar los detalles del desarrollo.

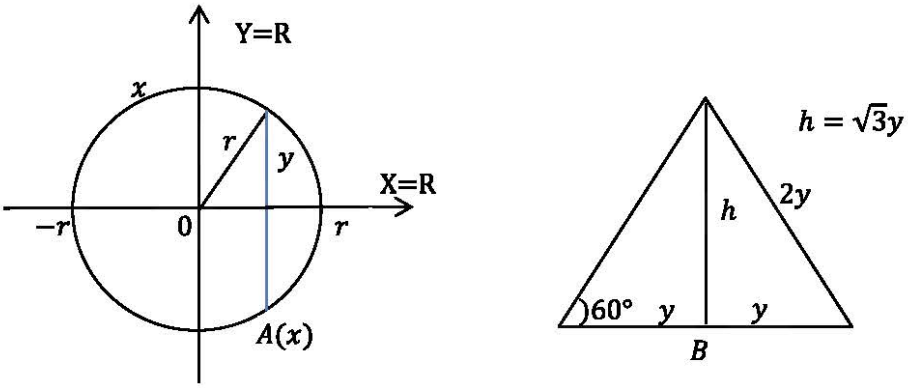

Figura 6.14

Siendo el radio $r = 7 \rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 49 = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow y = \sqrt{49 - x^2}$

La altura $h = \sqrt{4y^2 - y^2} \rightarrow h = \sqrt{3y^2} \rightarrow h = \sqrt{3}y$

Luego, $A(x) = \frac{Bh}{2} = \frac{(2y)\sqrt{3}y}{2} = \sqrt{3}y^2 = \sqrt{3}(\sqrt{49 - x^2})^2 = \sqrt{3}(49 - x^2)$. (Ver Figura 6.15).

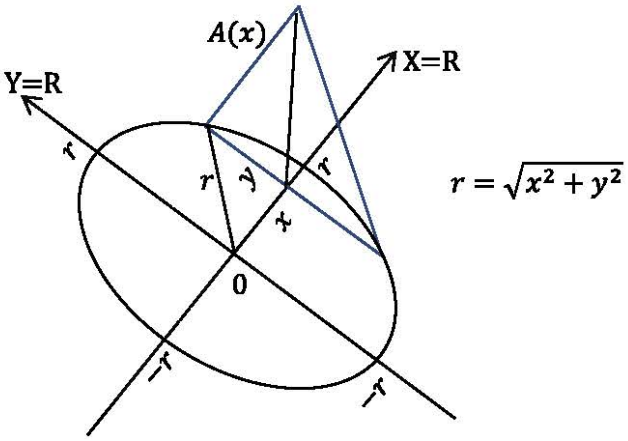

Figura 6.15

El volumen será $V(S) = \int_a^b A(x)dx = \int_{-7}^{7} \sqrt{3}(49 - x^2)dx = 2\sqrt{3}\int_0^7 (49 - x^2)dx$

$= 2\sqrt{3}\left[49x - \frac{x^3}{3}\right]_0^7 = 2\sqrt{3}\left[49(7) - \frac{7^3}{3}\right] - 2\sqrt{3}\left[49(0) - \frac{0^3}{3}\right] = 2\sqrt{3}\left[49(7) - \frac{7^3}{3}\right] = \frac{1372\sqrt{3}}{3}$

Finalmente, $V(S) = \frac{1372\sqrt{3}}{3}\ unid^3$

Ejemplo 3. La base de un sólido es un triángulo equilátero de lado "a", con un vértice situado en el origen de coordenadas y una de las alturas en el eje X. Todas las secciones planas del sólido perpendiculares al eje X son cuadrados con un lado en la base del sólido. Hállese el volumen del cuerpo así generado. (Ver Figura 6.16).

Solución.

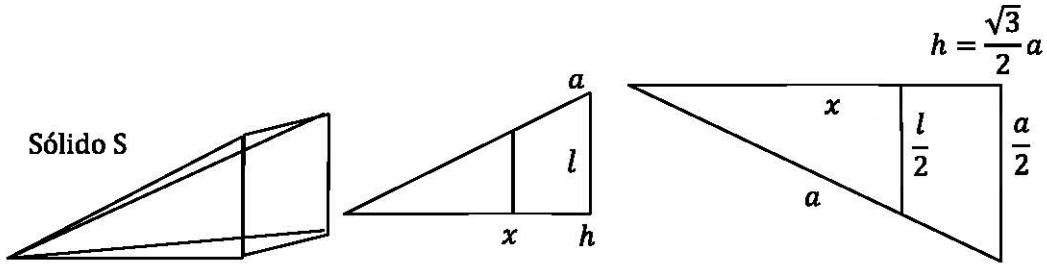

Figura 6.16

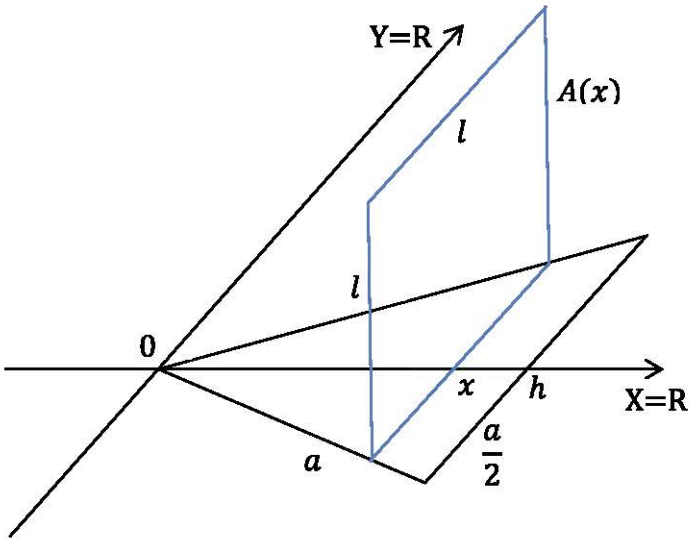

Figura 6.17

Usando proporciones: $\frac{x}{h} = \frac{l/2}{a/2} \rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{l}{a} \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}l = \rightarrow l = \frac{2}{\sqrt{3}}x$

La sección plana $A(x) = l^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2 \rightarrow A(x) = \frac{4}{3}x^2$. (Ver Figura 6.17).

El volumen es dado por $V(S) = \int_a^b A(x)dx = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \left(\frac{4}{3}x^2\right) dx = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} x^2 dx = \frac{4}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$

$= \frac{4}{3}\left[\frac{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^3}{3}\right] - \frac{4}{3}\left[\frac{0^3}{3}\right] = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3\ unid^3.$

Ejemplo 4. La base de un sólido es la región limitada por una circunferencia de radio "r". Todas las secciones planas perpendiculares a un diámetro fijo de la base son triángulos isósceles rectos con un cateto en el plano de la base.

Solución.

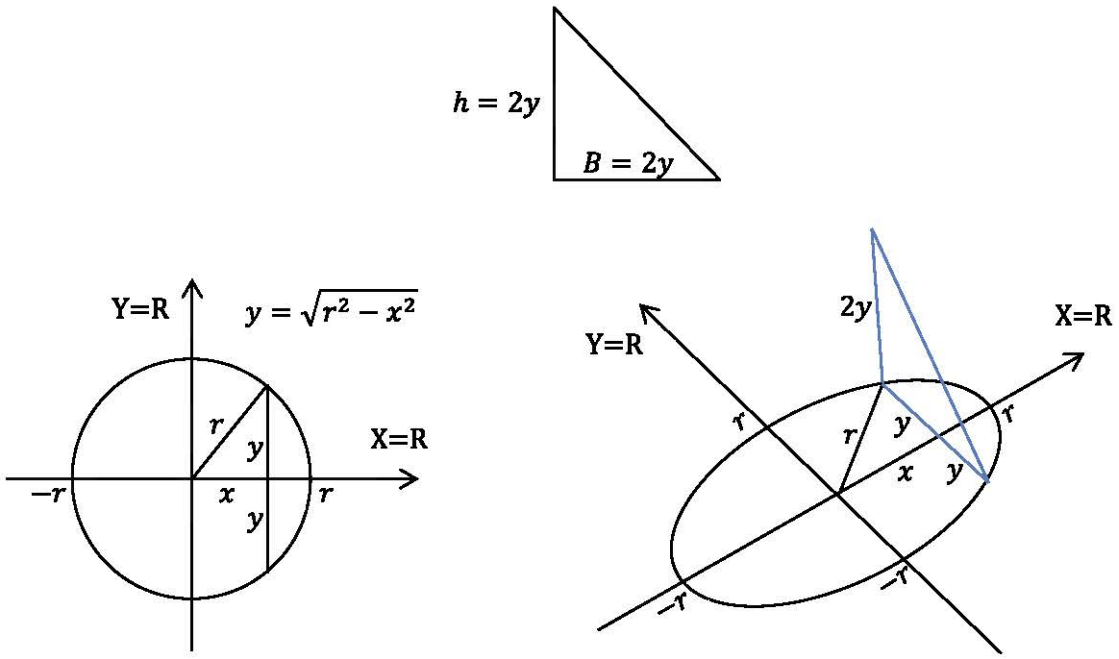

Figura 6.18

La sección plana: $A(x) = \frac{Bh}{2} = \frac{(2y)(2y)}{2} = 2y^2 = 2\sqrt{r^2 - x^2} = 2(r^2 - x^2)$. (Observar la Figura 6.18).

El volumen será dado por $V(S) = \int_a^b A(x)dx = \int_{-r}^{r} 2(r^2 - x^2)dx = 4\int_0^r (r^2 - x^2)dx$

$$= 4\left[r^2x - \frac{r^3}{3}\right]_0^r = 4\left[r^2r - \frac{r^3}{3}\right] - 4\left[r^2(0) - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{8}{3}r^3\ unid^3$$

Ejemplo 5. Una cuña se corta de un sólido con forma de cilindro circular recto con un radio de "*r*"cm, con un plano que pasa por un diámetro de la base y tiene una inclinación de 45° respecto al plano de la base. Hallar el volumen de la cuña. (Ver Figura 6.19).

Solución.

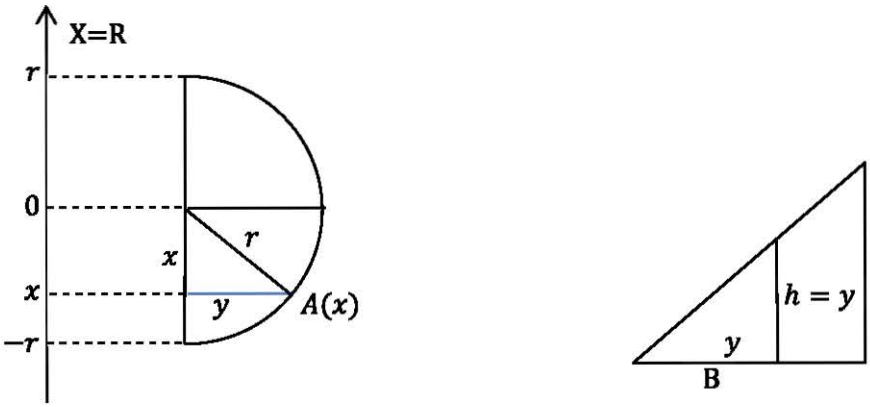

Figura 6.19

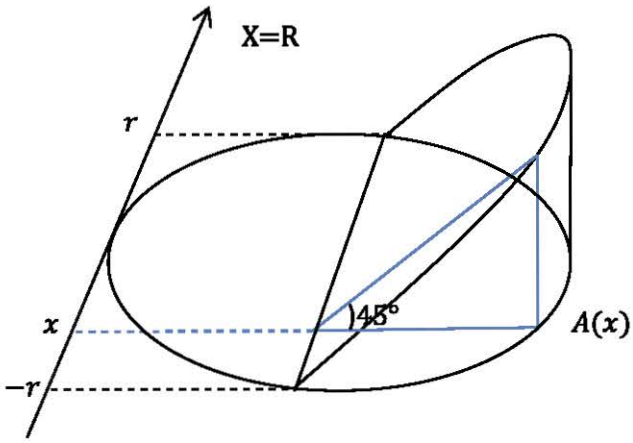

Figura 6.20

La sección $A(x) = \frac{bh}{2} = \frac{y \cdot y}{2} = \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)$. (Ir a Figura 6.20).

El volumen será dado por $V(S) = \int_a^b A(x)dx = \int_{-r}^{r} \frac{1}{2}(r^2 - x^2)dx = 2\int_0^r \frac{1}{2}(r^2 - x^2)dx$

$= \int_0^r (r^2 - x^2)dx = \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = \left[r^2 r - \frac{r^3}{3}\right] - \left[r^2(0)r - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{2}{3}r^3\ unid^3$.

Ejemplo 6. Encuentre el volumen de una esfera de radio "r".

Solución.

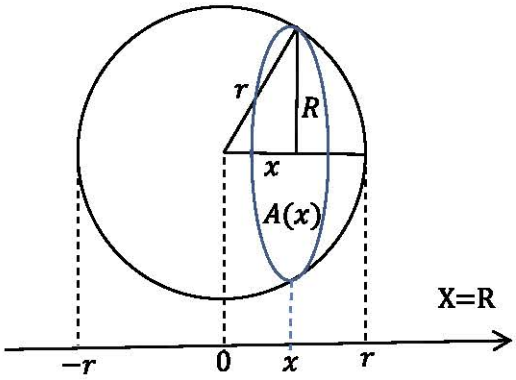

Figura 6.21

El radio es $R = \sqrt{r^2 - x^2}$

La sección $A(x) = \pi R^2 = \pi\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 = \pi(r^2 - x^2)$. (Ver Figura 6.21).

El volumen será dado por $V(S) = \int_a^b A(x)dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)dx = 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2)dx$

$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r = 2\pi \left[r^2 r - \frac{r^3}{3}\right] - 2\pi \left[r^2(0)r - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{4\pi}{3} r^3 \; unid^3$.

Ejemplo 7. Se taladra una bola de billar de radio "a" haciendo pasar el eje del taladro por el centro de la esfera hasta atravesarla completamente (Ver Figura 6.22). ¿Qué volumen de la esfera habrá quedado si el diámetro del hueco que se hizo es "a"?

Solución.

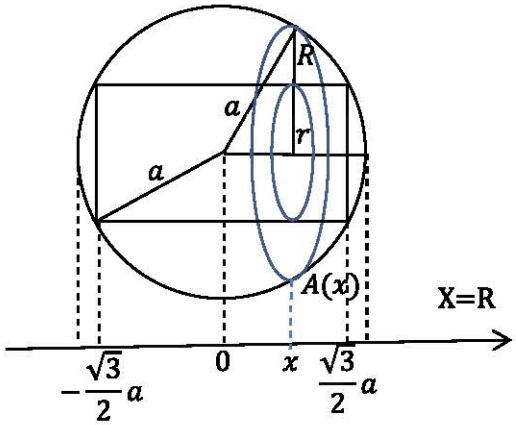

Figura 6.22

El radio mayor es $R = y = \sqrt{a^2 - x^2}$

El radio menor es $r = \frac{a}{2}$

Por otro lado, $l = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

La sección $A(x) = \pi(R^2 - r^2) = \pi\left[\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right] = \pi\left(a^2 - x^2 - \frac{a^2}{4}\right) = \pi\left(\frac{3}{4}a^2 - x^2\right)$

El volumen será dado por $V(S) = \int_a^b A(x)dx = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \pi\left(\frac{3}{4}a^2 - x^2\right)dx$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\left(\frac{3}{4}a^2 - x^2\right)dx = 2\pi\left[\frac{3}{4}a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

$$= 2\pi\left[\frac{3}{4}a^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3\right] - 2\pi\left[\frac{3}{4}a^2(0) - \frac{1}{3}(0)^3\right] = 2\pi\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)a^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3\ unid^3.$$

Ejemplo 8. Un vaso para agua es un cilindro circular recto de radio "a" y altura "h". Se voltea hasta que el nivel del agua biseque la base y toque el borde. Hallar el volumen del agua que queda en el vaso.

Solución.

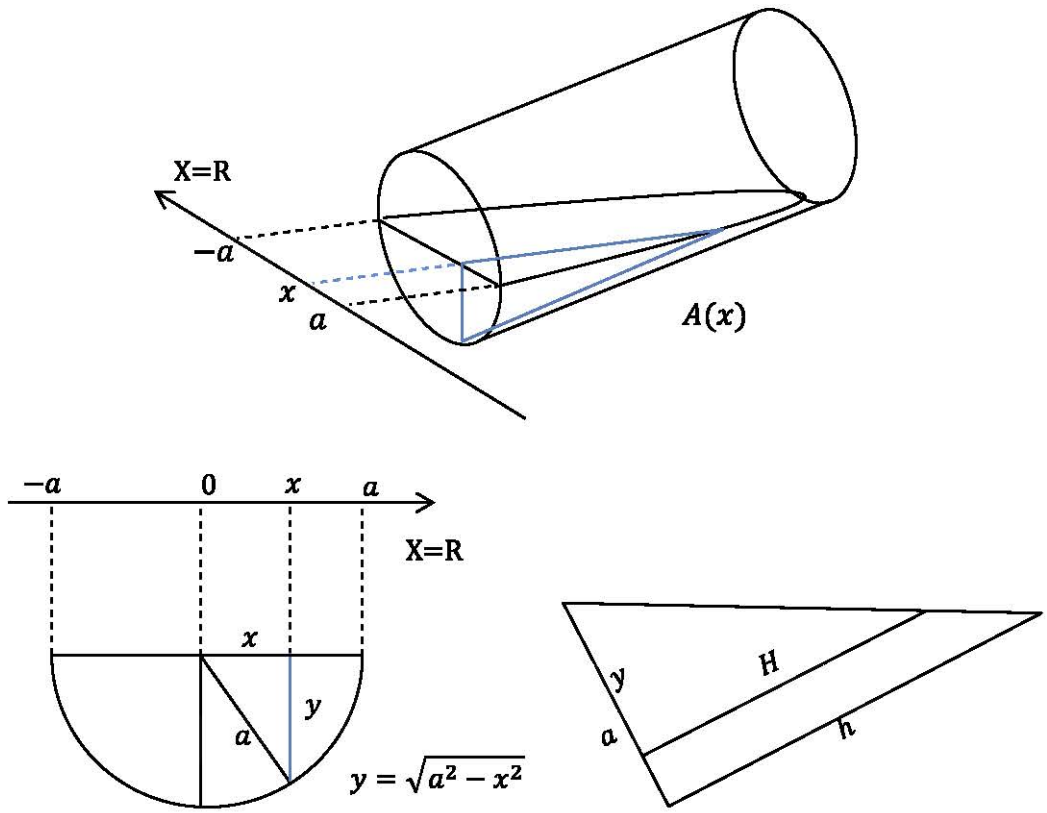

Figura 6.23

Usando proporciones $\frac{H}{h} = \frac{y}{a} \rightarrow H = \frac{h\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

La sección plana: $A(x) = \frac{Bh}{2} = \frac{yh\sqrt{a^2-x^2})}{2a} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}h\sqrt{a^2-x^2})}{2a} = \frac{h}{2a}(a^2 - x^2)$. (Observar la Figura 6.23).

El volumen será dado por $V(S) = \int_a^b A(x)dx = \int_{-a}^{a}\frac{h}{2a}(a^2 - x^2)dx = 2\frac{h}{2a}\int_0^a(a^2 - x^2)dx$

$$=\frac{h}{a}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{h}{a}\left[a^2a-\frac{a^3}{3}\right]-\frac{h}{a}\left[a^2(0)-\frac{0^3}{3}\right]=\frac{h}{a}\left(\frac{2}{3}a^3\right)=\frac{2}{3}ha^2\ unid^3\ .$$

6.7. INTEGRAL DEFINIDA Y EL VOLUMEN DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN (MÉTODO DE DISCOS)

VOLUMEN GENERADO POR UNA FUNCIóN CONTINUA (CURVA)

a) QUE GIRA ALREDEDOR DEL EJE "X":

$$V(S)=\int_a^b \pi r^2 dx=\int_a^b \pi[y]^2 dx=\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

La Figura 6.24 que se adjunta describe el caso.

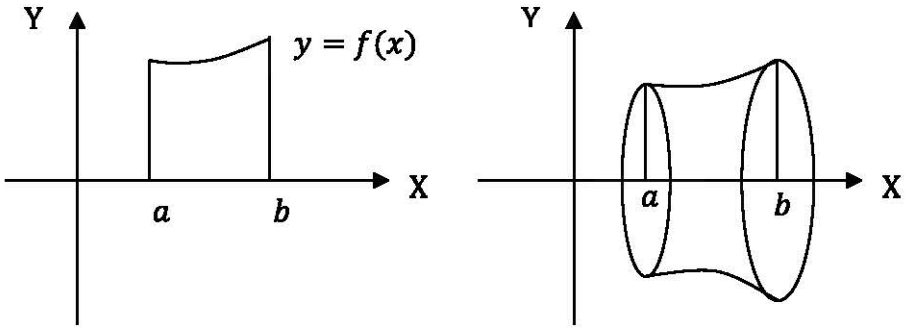

Figura 6.24

b) QUE GIRA ALREDEDOR DEL EJE "Y".

$$V(S)=\int_c^d \pi r^2 dy=\int_c^d \pi[x]^2 dy=\int_c^d \pi[F(y)]^2 dy$$

La Figura 6.25 que se adjunta describe el caso.

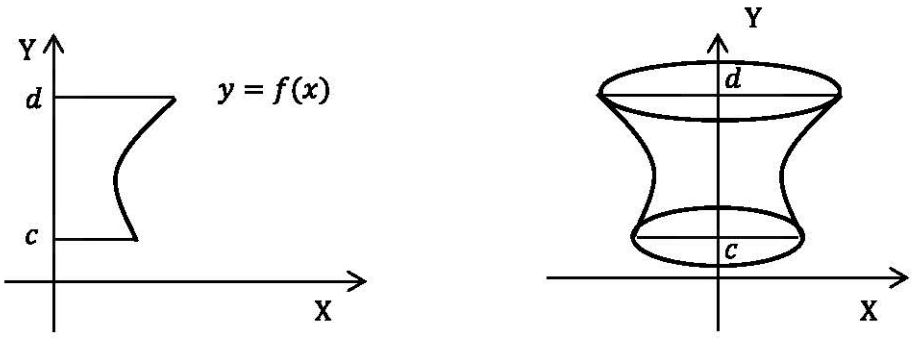

Figura 6.25

VOLUMEN GENERADO POR DOS FUNCIONES QUE ROTAN ALREDEDOR DE UN EJE:

a) VOLUMEN DE UN CILINDRO CIRCULAR RECTO HUECO.

El radio mayor es R y el radio menor es r de modo que el volumen del cilindro hueco (Volumen del cilindro mayor menos el volumen del cilindro menor) es dado por:

$$V(S) = \pi R^2 h - \pi r^2 h \rightarrow V(S) = \pi h(R^2 - r^2)$$

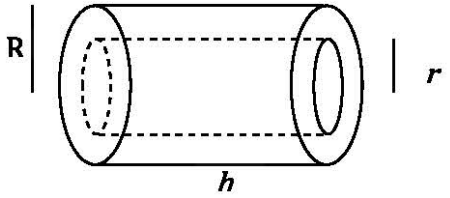

Figura 6.26

b) SI LAS DOS FUNCIONES GIRAN ALREDEDOR DEL EJE "X"

El radio mayor es dado por la función que está por arriba: $y = f_2(x)$ y el radio menor, por la función que está por debajo: $y = f_1(x)$; de modo que el volumen del "cilindro hueco" (volumen del cilindro mayor menos el volumen del cilindro menor) es dado por:

$$\begin{cases} R = f_2(x) \\ r = f_1(x) \end{cases} \rightarrow V(S) = \int_a^b \pi\{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\}dx$$

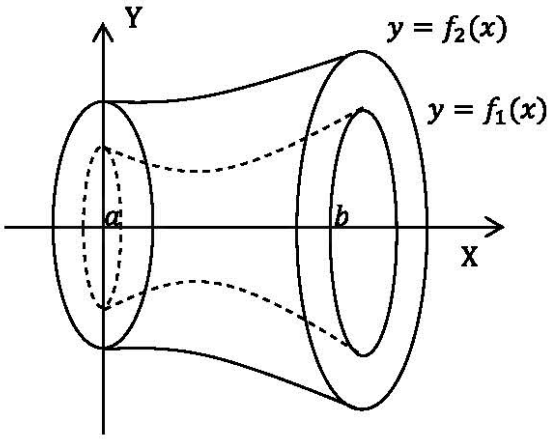

Figura 6.27

c) SI LAS DOS FUNCIONES GIRAN ALREDEDOR DEL EJE "Y"

El radio mayor se da por la función que está a la derecha: $x = F_2(y)$ y el radio menor, por la función que está por la izquierda: $x = F_1(y)$; de modo que el volumen del "cilindro hueco" (volumen del cilindro mayor menos el volumen del cilindro menor) es dado por:

$$\begin{cases} R = F_2(y) \\ r = F_1(y) \end{cases} \rightarrow V(S) = \int_c^d \pi\{[F_2(y)]^2 - [F_1(y)]^2\}dy$$

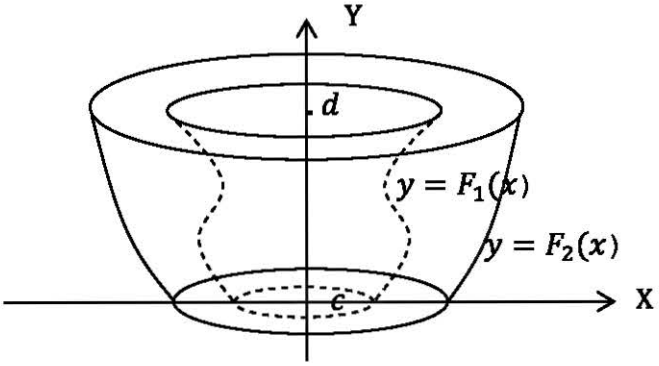

Figura 6.28

Ejemplo 1. Encontrar el volumen generado por rotación alrededor del eje X de la parte de la parábola $y = 4 - x^2$ que está por sobre X. (Ver Figura 6.29).

Solución.

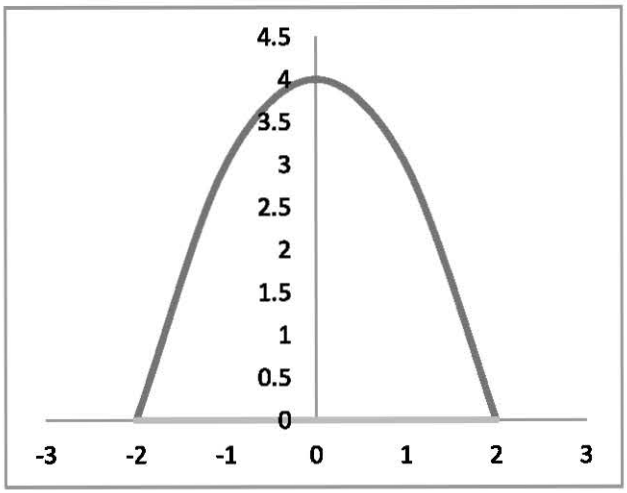

Figura 6.29

Parábola dada $P: y = 4 - x^2$. $P \cap X$, hacer $y = 0 \Rightarrow x = \pm 2$.

El radio es dado por $r = y = f(x) = 4 - x^2$

El volumen será $V(S) = \int_{-2}^{2} \pi[y]^2 dx = \pi \int_{-2}^{2} [4 - x^2]^2 dx = \pi \int_{-2}^{2} [16 - 8x^2 + x^4]^2 dx$

$= 2\pi \int_0^2 [16 - 8x^2 + x^4]^2 dx = 2\pi \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{512\pi}{15}\ unid^3.$

Ejemplo 2. La región que se encuentra entre la curva $y = x^3$; el eje X; las rectas $x = 2$, $x = 3$ giran alrededor del eje Y. Encontrar el volumen del sólido así obtenido. (Observar la Figura 6.30).

Solución. El volumen se obtiene en dos etapas:

a) De 0 a 8: $R = 3, r = 2$.

b) De 8 a 27: $R = 3, r = y^{1/3}$.

El volume sera $V(S) = \int_a^b \pi\{[f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2\}dx$

$$V(S) = \int_0^8 \pi\{[3]^2 - [2]^2\}dx + \int_8^{27} \pi\left\{[3]^2 - \left[y^{1/3}\right]^2\right\}dx$$

$$V(S) = \int_0^8 \pi\{9 - 4\}dx + \int_8^{27} \pi\{9 - y^{2/3}\}dx$$

$$V(S) = 5\pi \int_0^8 dx + \pi \int_8^{27}(9 - y^{2/3})dx = 5\pi[y]_0^8 + \pi\left[9y - y^{2/3}\right]_8^{27} = \frac{422\pi}{5} unid^3.$$

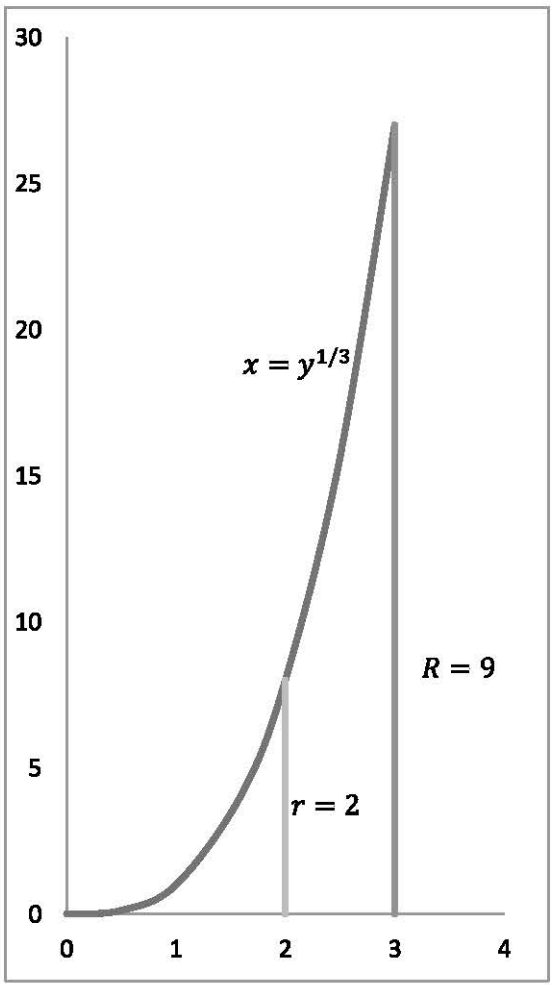

Figura 6.30

OBSERVACIONES. Para el caso de sólidos de revolución que se obtienen al girar la región D alrededor de un eje paralelo a los ejes coordenados.:

a) Si el giro de la región D se realiza alrededor de un eje paralelo al eje X, $y = k$, entonces el volumen se da por $V(S) = \int_a^b \pi\{[f(x) - k]^2 - [g(x) - k]^2\}dx$.

b) Si el giro de la región D se realiza alrededor de un eje paralelo al eje Y, $x = h$, entonces el volumen se da por $V(S) = \int_c^d \pi\{[F(y) - h]^2 - [G(y) - h]^2\}dy$.

Ejemplo 1. La superficie limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 4$ genera varios sólidos de revolución. Se pide hallar el volumen cuando:

i) Gira alrededor del eje Y. ii) Gira alrededor del eje X.

iii) Gira alrededor de la recta $x = 4$ (Paralela al eje Y).

Solución. (i) y (ii) se deja como ejercicio para el lector.

(iii) El giro alrededor del eje paralelo al eje Y; $x = 4$. (Ver Figura 6.31).

El volumen del sólido generado será $V(S) = \int_c^d \pi\{[F(y) - h]^2 - [G(y) - h]^2\}dy$

$$= \int_0^4 \pi\left\{[0-4]^2 - \left[y^{1/2} - 4\right]^2\right\}dy = \pi\int\left(8y^{1/2} - y\right)dy = \pi\left[\frac{16}{3}y^{3/2} - \frac{1}{2}y^2\right]_0^4 = \frac{104\pi}{3}\,unid^3.$$

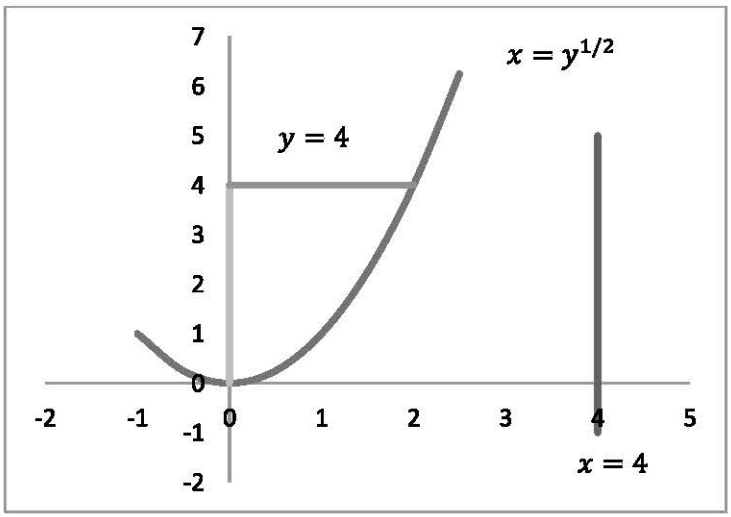

Figura 6.31

Ejemplo 2. Un sólido de revolución se forma por la rotación alrededor del eje X de la región limitada por la curva $y = \sqrt{2x + 4}$, el eje X, el eje Y, así como la recta $x = C$ $(C > 0)$. ¿Con qué valor de C el volumen será de $12\,\pi\ unid^2$? (Ver figura 6.32).

Solución.

El volumen es dado por $V(S) = \int_a \pi[f(x)]^2 dx$

Reemplazando datos: $V(S) = \int_{-2}^{C} \pi\left[\sqrt{2x+4}\right]^2 dx = \pi \int_{-2}^{C} \left[\sqrt{2x+4}\right]^2 dx = \pi \int_{-2}^{C} (2x+4) dx$

$= \pi[x^2 + 4x]_{-2}^{C} = \pi[C^2 + 4C + 4]$

Pero, como $V(S) = 12\pi \;\rightarrow\; 12\pi = \pi[C^2 + 4C + 4] \;\rightarrow\; C = \sqrt{12} - 2.$

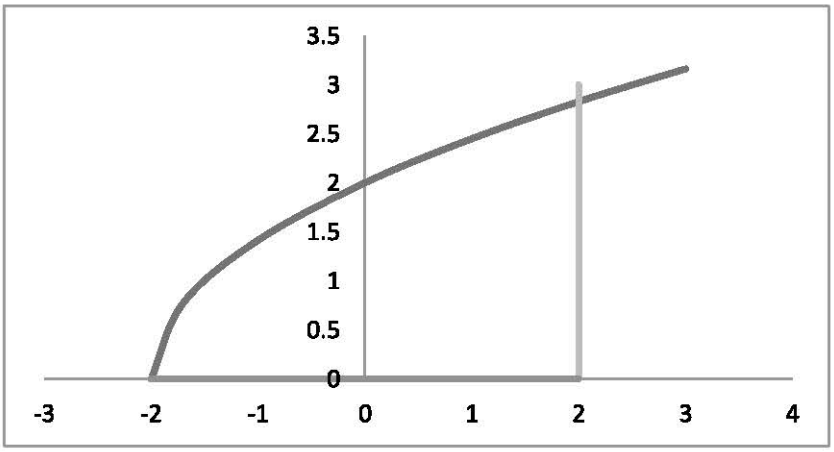

Figura 6.32

VOLUMEN DE **SÓLIDOS** DE **REVOLUCIÓN** POR EL MÉTODO DE CASCARONES.

a) Cuando el giro de la región D se realiza alrededor del eje Y, el volumen es dado por
$V(S) = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$

b) Cuando el giro de la región D se realiza alrededor del eje X, el volumen es dado por
$V(S) = 2\pi \int_c^d y\, F(y)\, dy$

Ejemplo 1. Hallar el volumen del sólido que resulta tras hacer girar alrededor del eje Y, la región D encerrada en el primer cuadrante por la curva $y = 3 + 2x - x^2$. (Observar la Figura 6.33).

Solución.

Parábola dada P: $y = 3 + 2x - x^2$

Parábola intersectada con el eje X: $P \cap X$, en $x = -1$, $x = 3$.

Parábola intersectada con el eje X: $P \cap Y$, en y=3.

El volumen es dado por $V(S) = 2\pi \int_a^b x\, f(x)\, dx$

Reemplazando datos: $V(S) = 2\pi \int_0^3 x(3 + 2x - x^2)\, dx = 2\pi \int_0^3 x(3x + 2x^2 - x^3)\, dx$

$$= 2\pi\left[\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^3 = \frac{45\pi}{2}\,unid^3.$$

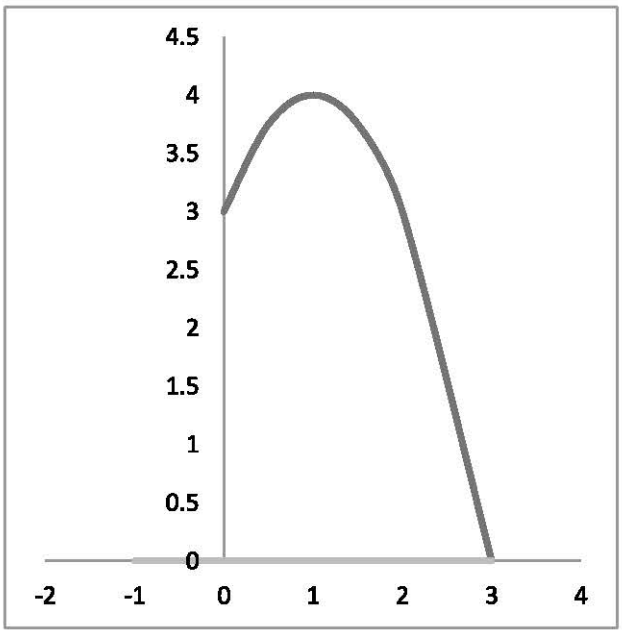

Figura 6.33

Ejemplo 2. Hallar el volumen del sólido que resulta de hacer girar la región encerrada por la curva $x = \sqrt{2y} + 1$, $y = 2$, $x = 0$, alrededor del eje X. (Observar la Figura 6.34).

Solución.

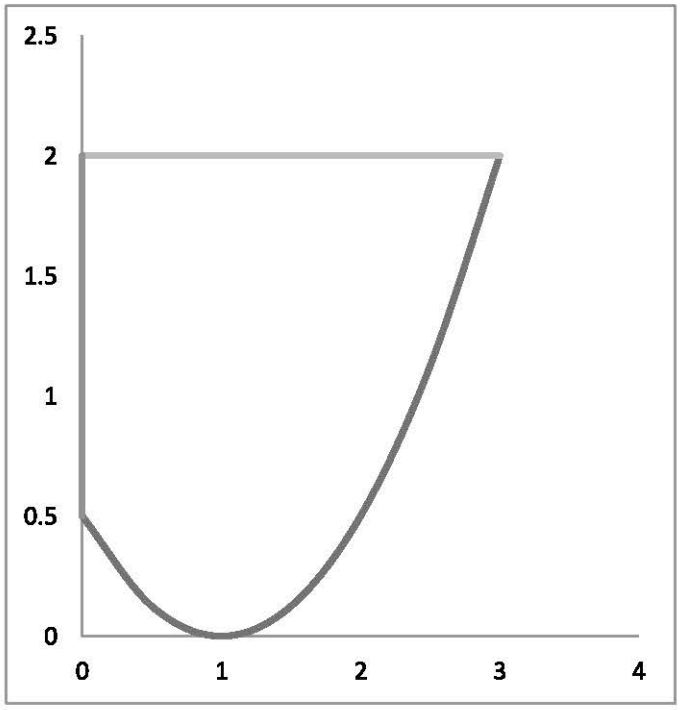

Figura 6.34

La función es $x = \sqrt{2y+1}$ o $F(y) = \sqrt{2y+1}$.

El volumen es dado por $V(S) = 2\pi \int_c^d y\, F(y)\, dy$

Reemplazando datos: $V(S) = 2\pi \int_0^2 y\left(\sqrt{2y}+1\right) dx = 2\pi \int_0^2 \left(\sqrt{2}y^{3/2} + y\right) dy$

$= 2\pi \left[\frac{2\sqrt{2}}{5} y^{5/2} + \frac{1}{2} y^2\right]_0^2 = \frac{52\pi}{5} unid^3.$

6.8. INTEGRAL DEFINIDA Y LA LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA

DEFINICIÓN 1. (CON RESPECTO AL EJE X) Si la función $y = f(x)$ tiene derivada continua en el intervalo $I = [a; b]$, entonces la LONGITUD DE ARCO de la curva representada por "f" entre "a" y "b" es dada por: $S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

DEFINICIÓN 2. (CON RESPECTO AL EJE Y) Si la función $x = F(y)$ tiene derivada continua en el intervalo $I = [c; d]$, entonces la LONGITUD DE ARCO de la curva representada por "F" entre "c" y "d" es dada por: $S = \int_c^d \sqrt{1 + [F'(y)]^2} dy$

Ejemplo 1. (Para verificar la longitud de una circunferencia) Hallar la longitud de una circunferencia de radio "r".

Solución

La ecuación de una circunferencia de radio "r" es dada por $x^2 + y^2 = r^2$.

De donde, $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$, tomando la parte positiva (parte de la circunferencia que se encuentra por sobre el eje X) se tiene $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

La derivada de y es $y' = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

La longitud de la parte del primer cuadrante (cuarta parte de la circunferencia) es dada por

$$\frac{S}{4} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_0^r \sqrt{1 + \left[\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right]^2} dx = r \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r\left[Arcsen\left(\frac{x}{r}\right)\right]_0^r = \frac{\pi r}{2}.$$

Finalmente, la longitud de la circunferencia es dada por $S = 2\pi r$.

Ejemplo 2. Hallar la longitud del arco de la parte de la parábola dada por $P: y = 4x - x^2$ que se encuentra por encima del eje X. (Ver Figura 6.35).

Solución.

La ecuación de la parábola es $y = 4x - x^2$.

La derivada de la ecuación es $y' = 4 - 2x$.

La longitud pedida será $S = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \int_0^4 \sqrt{1 + [4 - 2x]^2}dx$

Haciendo cambio de variable: $u = 4 - 2x \rightarrow du = -2dx \rightarrow dx = -\frac{du}{2}$

Cambio en los límites: si $x = 0 \rightarrow u = 4$ y si $x = 4 \rightarrow u = -4$.

Reemplazando: $S = \int_0^4 \sqrt{1 + [4 - 2x]^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-4} \sqrt{1 + u^2}du$

Se tiene $S = 9{,}29 \ und.$

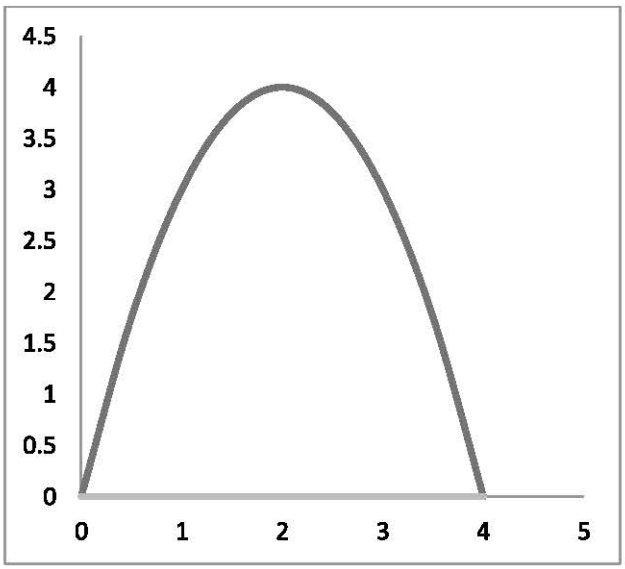

Figura 6.35

Ejemplo 3. Hallar la longitud de arco de la curva dada por $y^3 = x^2$ comprendida entre los puntos (0;0) y (8;4). (Ir a la Figura 6.36).

Solución

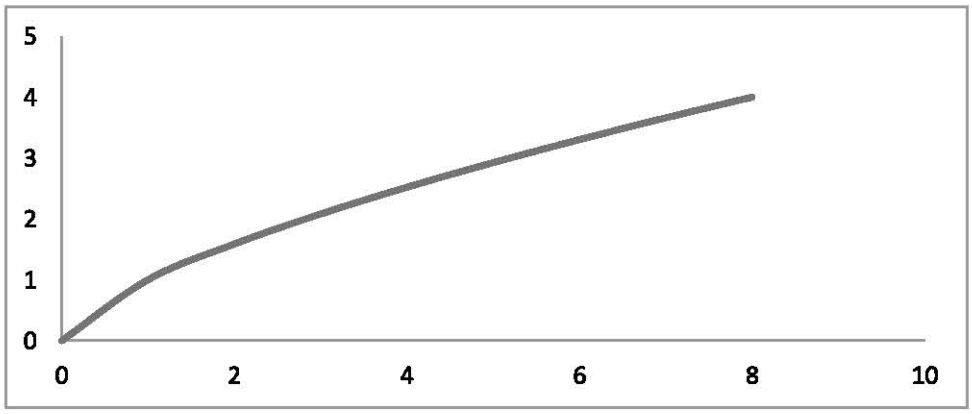

Figura 6.36

Si $y^3 = x^2 \Rightarrow x = y^{3/2}$ o $F(y) = y^{3/2} \rightarrow F'(y) = \frac{3}{2}y^{1/2}$

La longitud será $S = \int_c^d \sqrt{1 + [F'(y)]^2}dy$

Reemplazando: $S = \int_0^4 \sqrt{1 + \left[\frac{3}{2}y^{1/2}\right]^2}\, dy = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}y}dy$

CV: $u = 1 + \frac{9}{4}y \rightarrow du = \frac{9}{4}du$. También: Si $y = 0 \rightarrow u = 1$; si $y = 4 \rightarrow u = 10$

$\Rightarrow \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}y}dy = \frac{4}{9}\int_1^{10} u^{1/2}du = \frac{4}{9}\frac{2}{3}\left[u^{3/2}\right]_1^{10} = \frac{8}{27}\left[10^{3/2} - 1\right]_1^{10} = 9{,}07\ und.$

Por lo tanto, la longitud de arca pedida es $S = 9{,}07$ unidades.

6.9. INTEGRAL DEFINIDA Y CENTRO DE GRAVEDAD DE UNA REGIÓN PLANA

DEFINICIÓN. El centro de gravedad es el punto que permite a una superficie plana encontrarse en equilibrio.

PROCESO. Hacemos uso del diferencial de área dA y un centro de gravedad tentativo $C(h; k)$ para el estudio. El punto $(h; k)$ es un centro de gravedad tentativo mientras que $(\bar{x}; \bar{y})$ es el verdadero centro de gravedad de la lámina o superficie en cuestión.

a) Para cuando la lámina D está limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$ entre las rectas $x = a$ y $x = b$ por sobre el eje X (ver Figura 6.37); el proceso es el siguiente:

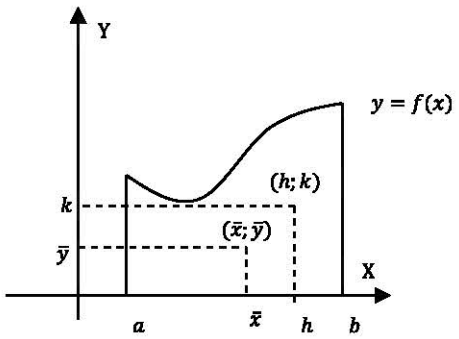

Figura 6.37

El diferencial de área es $dA = y\, dx = f(x)dx$

La coordenada horizontal: $h = x$

La coordenada vertical: $k = \frac{y}{2} = \frac{1}{2}f(x)$

El área de la región D es dada por $A(D) = \int_a^b dA$

El momento con respecto al eje X: $M_x = \int_a^b k\, dA = \int_a^b \left[\frac{1}{2} f(x)\right] f(x)dx$

El momento con respecto al eje Y: $M_y = \int_a^b h\, dA = \int_a^b x\, f(x)dx$

Siendo $A = A(D)$ el área de la región D, el centro de gravedad es dado por $(\bar{x};\bar{y}) = \left(\frac{M_y}{A};\frac{M_x}{A}\right)$

b) Para cuando la lámina D está limitada por la gráfica de la función $x = F(y)$ entre las rectas $y = c$ y $y = d$, a la derecha del eje Y, (ver Figura 6.38); el proceso es el siguiente:

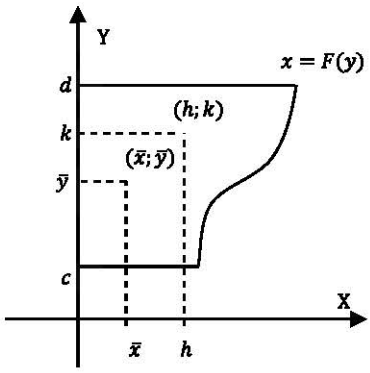

Figura 6.38

El diferencial de área es $dA = x\, dy = F(y)dy$

La coordenada horizontal: $h = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}F(y)$

La coordenada vertical: $k = y$

El área de la región D es dada por $A(D) = \int_c^d dA$

El momento con respecto al eje X: $M_x = \int_c^d k\, dA = \int_c^d y\, F(y)dy$

El momento con respecto al eje Y: $M_y = \int_c^d h\, dA = \int_c^d \left[\frac{1}{2}F(y)\right] F(y)dy$

Siendo $A = A(D)$ el área de la región D, el centro de gravedad es dado por $(\bar{x};\bar{y}) = \left(\frac{M_y}{A};\frac{M_x}{A}\right)$

OBSERVACIONES. Si la lámina D está entre dos curvas, $f(x)$ y $g(x)$ [o $F(y)$ y $G(y)$], entonces:

a) Con respecto al eje X, se tiene lo siguiente:

El diferencial de área es $dA = [f(x) - g(x)]\, dy$

La coordenada horizontal: $h = x$

La coordenada vertical: $k = \frac{f(x)+g(x)}{2}$

El área de la región D es dada por $A(D) = \int_a^b dA$

El momento con respecto al eje X: $M_x = \int_a^b k\, dA = \int_a^b \left[\frac{f(x)+g(x)}{2}\right][f(x) - g(x)]dx$

El momento con respecto al eje Y: $M_y = \int_a^b h\, dA = \int_a^b x\,[f(x) - g(x)]dx$

Siendo A el área de la región D, el centro de gravedad es dado por $(\bar{x};\bar{y}) = \left(\frac{M_y}{A};\frac{M_x}{A}\right)$

b) Con respecto al eje Y se tiene lo siguiente:

El diferencial de área es $dA = [F(y) - G(y)]\, dy$

La coordenada horizontal: $h = \frac{F(y)+G(y)}{2}$

La coordenada vertical: $k = y$

El área de la región D es dada por $A(D) = \int_c^d dA$

El momento con respecto al eje X: $M_x = \int_c^d k\, dA = \int_c^d y[F(y) - G(y)]dy$

El momento con respecto al eje Y: $M_y = \int_c^d h\, dA = \int_c^d \left[\frac{F(y)+G(y)}{2}\right][F(y) - G(y)]dy$

Ejemplo 1. Hallar el centro de gravedad de la lámina limitada por la parábola $x = \frac{1}{4}y^2$, el eje Y, así como la recta $y = 4$. (Observar la Figura 6.39).

Solución.

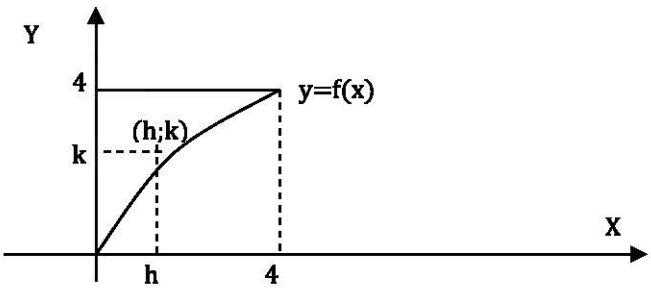

Figura 6.39

El diferencial de área es $dA = F(y)dy = \frac{1}{4}y^2dy$

La coordenada horizontal: $h = \frac{x}{2} = \frac{F(y)}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{4}y^2 = \frac{1}{8}y^2$

La coordenada vertical: $k = y$

El área es dada por $A(D) = \int_c^d dA = \int_0^4 \frac{1}{4}y^2dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^4 = \frac{16}{3}unid^2$.

El momento con respecto al eje X: $M_x = \int_c^d k\, dA = \int_0^4 y\left[\frac{1}{4}y^2\right]dy = \frac{1}{4}\int_0^4 y^3\, dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^4 = 16$

El momento con respecto al eje Y: $M_y = \int_c^d h\, dA = \int_c^d \left[\frac{F(y)}{2}\right]F(y)dy = \int_0^4 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}y^2\right)\right]\left(\frac{1}{4}y^2\right)dy$

$= \frac{1}{32}\int_0^4 y^4\, dy = \frac{1}{32}\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^4 = \frac{32}{5}unid^2$.

Luego el centro de gravedad es dado por $(\bar{x};\bar{y}) = \left(\frac{M_y}{A};\frac{M_x}{A}\right) = \left(\frac{32/5}{16/3};\frac{16}{16/3}\right) = \left(\frac{6}{5};3\right)$

Ejemplo 2. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por las curvas dadas: $x = 4y - y^2, y = x$. (Ir a la Figura 6.40).

Solución.

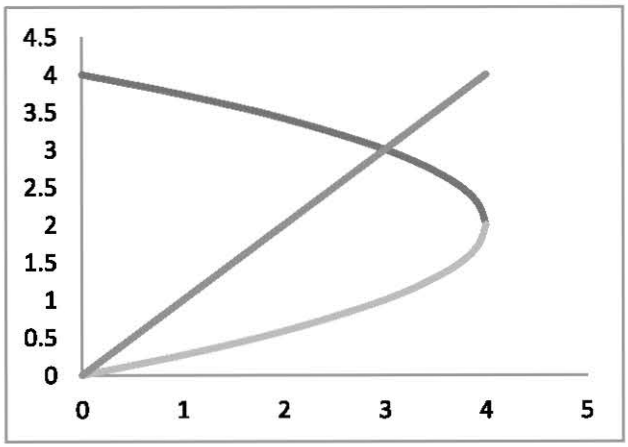

Figura 6.40

El diferencial de área es $dA = [F(y) - G(y)]\, dy = [(4y - y^2) - y]\, dy = [3y - y^2]\, dy$

La coordenada horizontal: $h = \frac{F(y)+G(y)}{2} = \frac{(4y-y^2)+y}{2} = \frac{1}{2}(5y - y^2)$

La coordenada vertical: $k = y$

El área de la región D es dada por $A(D) = \int_c^d dA = \int_0^3 [3y - y^2]\, dy = \left[\frac{2y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^3 = \frac{9}{2}\, unid^2$.

El momento con respecto al eje X: $M_x = \int_c^d k\, dA = \int_c^d y[F(y) - G(y)]dy$

$= \int_0^3 y[3y - y^2]\, dy = \int_0^3 [3y^2 - y^3]\, dy = \left[y^3 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^3 = \frac{27}{4}$

El momento con respecto al eje Y: $M_y = \int_c^d h\, dA = \int_c^d \left[\frac{F(y)+G(y)}{2}\right][F(y) - G(y)]dy$

$= \int_0^3 \left[\frac{1}{2}(5y - y^2)\right][3y - y^2]dy = \frac{1}{2}\int_0^3 [15y^2 - 8y^3 + y^4)]dy = \frac{1}{2}\left[\frac{15}{3}y^3 - 2y^4 + \frac{1}{5}y^5\right]_0^3 = \frac{108}{5}$

En consecuencia, el centro de gravedad será $(\bar{x}; \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{A}; \frac{M_x}{A}\right) = \left(\frac{27/4}{9/2}; \frac{108/5}{9/2}\right) = \left(\frac{3}{2}; \frac{24}{5}\right)$

6.10. INTEGRAL DEFINIDA Y ÁREA DE SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

a) El área S de una superficie de revolución generada al girar la gráfica de la función $y = f(x)$ alrededor del eje X, desde $x = a$ hasta $x = b$ es dada por:

$$S = \int_a^b 2\pi\, f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

b) El área S de una superficie de revolución generada al girar la gráfica de la función $x = F(y)$ alrededor del eje Y, desde $y = c$ hasta $y = d$ es dada por:

$$S = \int_c^d 2\pi F(y)\sqrt{1 + [F'(y)]^2}dy$$

Nota: El área de la superficie no es total, únicamente de la parte del sólido, generada por la curva $y = f(x)$ o por $x = F(y)$.

Ejemplo 1. Hallar el área S de la superficie de revolución generada por la gráfica de $y = 2\sqrt{x}$, desde $x = 0$ hasta $x = 8$, al girar alrededor del eje X.

Solución. Si $y = 2\sqrt{x}$, su derivada es $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ o $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

El área de la superficie será $S = \int_a^b 2\pi\, f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx = \int_0^8 2\pi(2\sqrt{x})\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\, dx$

$= 4\pi \int_0^8 (x + 1)^{1/2}dx = 4\pi\left[\frac{2}{3}(x + 1)^{3/2}\right]_0^8 = \frac{8}{3}\pi\left(9^{3/2} - 1\right) = \frac{208}{3}\pi\ unid^2.$

Ejemplo 2. Calcular el área S de la catenoide: Superficie generada por la rotación de la catenaria $y = a\, Cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ alrededor del eje X, desde $x = 0$ hasta $x = a$.

Solución.

Si $y = a\,Cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, entonces la derivada será $y' = a\,Senh\left(\frac{x}{a}\right)$ o $f'(x) = a\,Senh\left(\frac{x}{a}\right)$

El área de la superficie será $S = \int_a^b 2\pi\, f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

$$= \int_0^a 2\pi\left[a\,Cos\left(\frac{x}{a}\right)\right]\sqrt{1+\left[aCosh\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2}\,dx = \int_0^a 2\pi\left[a\,Cos\left(\frac{x}{a}\right)\right]\sqrt{1+\left[Sen\left(\frac{x}{a}\right)\right]^2}\,dx$$

$$= 2a\pi\int_0^a Cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)dx = 2a\pi\left[\frac{1}{2}x + \frac{a}{4}Senh\left(\frac{2x}{a}\right)\right]_0^a = a^2\pi\left[1+\frac{1}{2}Senh(2)\right].$$

Es decir, el área de la superficie resulta $S = a^2\pi\left[1+\frac{1}{2}Senh(2)\right]$

6.11. INTEGRAL DEFINIDA Y EL VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN REAL

Otra de las aplicaciones de la integral definida es calcular el valor promedio de una función, el cual se entiende como el promedio de la función para un número muy grande de valores a tasar.

DEFINICIÓN 1. Si $f: I \subset R \to R$ una función continua en un intervalo $I = [a; b]$, entonces el valor promedio de la función $y = f(x)$ en ese intervalo es dado por $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

DEFINICIÓN 2. Si $F: I \subset R \to R$ una función continua en un intervalo $I = [c; d]$, entonces el valor promedio de la función $x = F(y)$ en ese intervalo es dado por $\bar{F} = \frac{1}{d-c}\int_c^d F(y)dy$

Ejemplo 1. Se muestra el valor promedio de la función $f(x) = x - 3x^2$ en el intervalo $I = [-1;\ 2]$. (Ver Figura 6.41).

Aplicando la fórmula $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^2 (x-3x^2)dx = \frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2} - x^3\right]_{-1}^2 = -\frac{5}{2}$

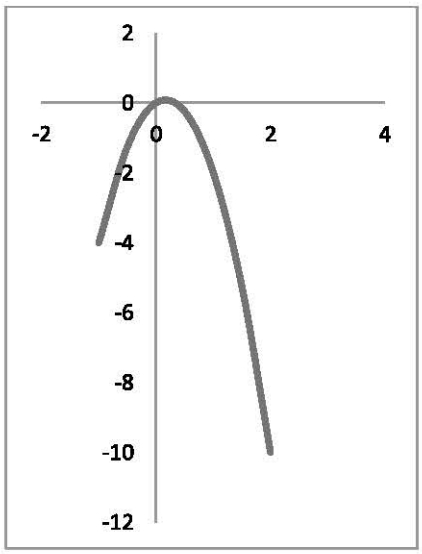

Figura 6.41

Ejemplo 2. Supóngase que en la parte central de un pequeño lago poco profundo, la temperatura T (en grados Fahrenheit) desde las 8 am ($t = 0$) hasta las 6 pm ($t = 10$) durante el mes de mayo, se determina aproximadamente en la forma como indica la Figura 6.42. Determine la temperatura media o promedio desde las 8 am hasta las 6 pm. Siendo $T(t) = -t^2 + 10t + 50$.

Solución.

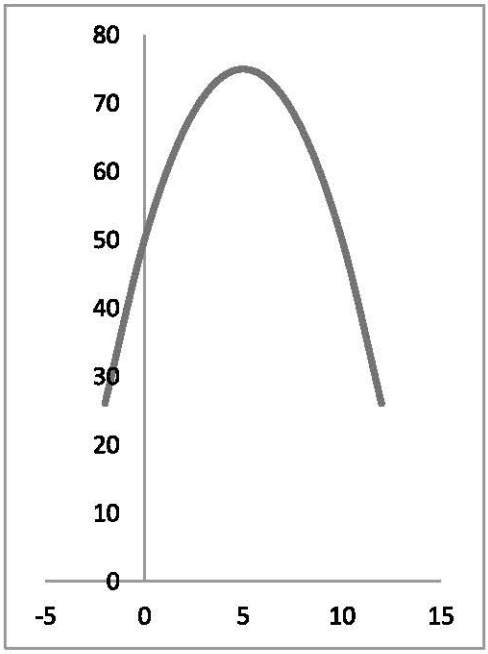

Figura 6.42

Aplicando la fórmula $\bar{T} = \frac{1}{b-a}\int_a^b T(t)dt = \frac{1}{10-0)}\int_0^{10}(-t^2 + 10t + 50)dt$

$$= \frac{1}{10}\left[-\frac{t^3}{3} + 5t^2 + 50t\right]_0^{10} = \frac{200}{3} \approx 67°F$$

Esto significa que la temperatura desde las 8 am hasta las 6 pm ha sido en promedio de 67° Fahrenheit.

Nota. Observemos que a las 8 am ($t = 0$) la temperatura es de 50° Fahrenheit; que a la 1 pm ($t = 5$) es de 75° F (la mayor); y a las 6 pm, de 50° F.

6.12. INTEGRAL DEFINIDA Y EL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA

Decimos, en general, que se ha realizado un trabajo cuando una fuerza ha movido un objeto. El concepto de trabajo es importante, especialmente para los ingenieros al momento de determinar la energía requerida para realizar diferentes tareas físicas. Son ejemplos: saber la

cantidad de trabajo realizado por una grúa al levantar un determinado objeto, si se comprime un resorte o cuando un vehículo transporta una carga.

A continuación, se proporciona la definición de trabajo efectuado por una *fuerza constante*:

DEFINICIÓN 1. Si una fuerza constante F aplicada sobre un objeto permite que este se mueva una distancia D, entonces el trabajo W realizado por dicha fuerza es dado por $W = FD$.

Ahora, se da a conocer la definición de trabajo realizado por una *fuerza variable*:

DEFINICIÓN 2. Si un objeto se mueve a lo largo de una línea recta debido a la acción de una fuerza $F(x)$ que varía continuamente, entonces el trabajo realizado por dicha fuerza conforme el objeto se mueve desde $x = a$ hasta $x = b$ viene dada por $W = \int_a^b F(x)dx$

Ejemplo 1. Hallar el trabajo necesario para levantar un objeto de 180 libras a una altura de 5 pies.

Solución. (Aplicamos definición 1)

Trabajo $W = FD = 180(5) = 900$ pies-libras.

Ejemplo 2. Un resorte requiere una fuerza de 21 libras para ser estirado $1/3$ pie, excediendo su posición de reposo. Calcule el trabajo requerido para estirar el resorte $1/3$ pie más que su posición de reposo y compare con el que se efectúa para estirarlo otro $1/3$ pie, hasta alcanzar una extensión de $2/3$ de pie respecto al reposo.

Solución. (Aplicamos definición 2)

En base a la ley de Hooke, determinamos la constante de rigidez del resorte: $21 = k\left(\frac{1}{3}\right)$ o $k = 63$, entonces $F(x) = 63x$ representa la fuerza necesaria para estirar el resorte "x" pies más de su posición normal.

a) El trabajo realizado al estirar el resorte desde el reposo, $x = 0$, hasta la posición $x = \frac{1}{3}$ queda expresada de esta forma:

TRABAJO $= W = \int_a^b F(x)dx = \int_0^{1/3}(63x)dx = \left[63\frac{x^2}{2}\right]_0^{1/3} = \frac{7}{2} = 3{,}5$ pies-libras.

Lo cual denota que para estirar el resorte $1/3$ de pie más allá de su posición de equilibrio, se necesita 3,5 pies – libras de fuerza.

b) Si se estira el resorte otro $1/3$ de pie desde la posición $x = \frac{1}{3}$hasta $x = \frac{2}{3}$, se tendrá lo siguiente:

TRABAJO $= W = \int_a^b F(x)dx = \int_{1/3}^{2/3}(63x)dx = \left[63\frac{x^2}{2}\right]_{1/3}^{2/3} = \frac{21}{2} = 10{,}5$ pies-libras.

Esto significa que para estirar el resorte 2/3 de pie más allá de su posición de equilibrio, se necesita 10,5 pies – libras de fuerza.

Observación: Estirar el primer 1/3 de pie fue más fácil que el siguiente.

Ejemplo 3. Se levanta un objeto de 900 libras de peso por medio de un cable y una polea que está 10 pies por encima del objeto. El cable pesa dos libras por pie. Calcule el trabajo requerido para levantar el objeto tres pies.

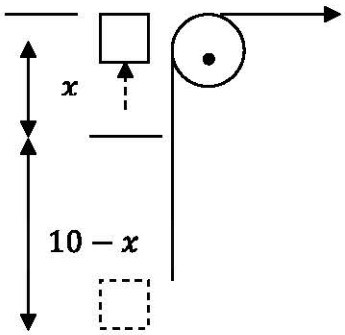

Figura 6.43

Solución

Denotamos por "x" la distancia en que se levanta el objeto, el peso del cable será (Longitud)(Densidad) $= (10 - x)(2)$ libras.

La fuerza total del objeto hacia abajo junto con el cable ha de ser $F(x) = 900 + (10 - x)(2)$.

El trabajo realizado resulta TRABAJO = $W = \int_a^b F(x)dx$

$W = \int_0^3 [900 + 2(10 - x)]dx = \int_0^3 [920 - 2x]dx = [920x - x^2]_0^3 = 920(3) - 3^2 = 2751$ pies – libras.

Obsérvese que para levantar al objeto tres pies, se requiere (900)(3)=2700 pies–libras de trabajo; los 51 restantes se utilizarán para levantar los 3 pies de cable.

Ejemplo 4. Un módulo espacial pesa 15 toneladas en la superficie terrestre. ¿Cuánto trabajo exige elevarlo a una altura de 800 millas? No se tomará en cuenta la resistencia del aire ni el peso del combustible.

Solución.

Como el peso de un cuerpo varía proporcionalmente, y en sentido inverso, al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra, la fuerza ejercida por la gravedad será $F(x) = \frac{k}{x^2}$. Dado que el

módulo pesa 15 toneladas en la superficie de la Tierra, cuyo radio es aproximadamente 4 000 millas, podemos hallar la constante de proporcionalidad $15 = \frac{k}{4000^2} \rightarrow k = 240\ 000\ 000$.

El módulo debe colocarse a 800 millas, esto significa que será transportado desde $x = 4000$ hasta $x = 4800$ millas. El trabajo total realizado será TRABAJO $= W = \int_a^b F(x)dx$

$$W = \int_{4000}^{4800} \frac{240000000}{x^2} dx = \left[-\frac{240000000}{x}\right]_{4000}^{4800} = 10\ 000 \text{ toneladas – millas.}$$

Es decir, para colocar el módulo espacial cuyo peso es 15 toneladas, a 800 millas de distancia por sobre la Tierra, se requiere de 10 000 toneladas–millas de fuerza.

Ejemplo 5. Un tanque esférico de 8 pies de radio está lleno hasta la mitad de un aceite que pesa 50 libras por pie cúbico. Calcular el trabajo requerido para bombear el aceite a través de un orificio en la parte superior del tanque.

Solución.

La fuerza dada por el peso del aceite será Fuerza $= 50\pi x^2$.

Llevando al problema a un sistema de coordenadas, para un círculo de radio 8 centrado en el punto (0;8) se tiene la siguiente ecuación: $x^2 + (y-8)^2 = 8^2 \rightarrow x^2 = 16y - y^2$

Entonces la fuerza quedará expresada así: $Fuerza = 50\pi(16y - y^2)$

Por otro lado, el aceite debe elevarse a una distancia de $(16-y)$ pies; en consecuencia, la función que rige el trabajo realizado será $f(y) = 50\pi(16y - y^2)(16 - y) = 50\pi(256y - 32y^2 + y^3)$.

Finalmente, como el tanque está lleno hasta la mitad, "y" varía de 0 a 8; por tanto, el trabajo requerido para vaciarlo será el siguiente:

$$w = \int_0^8 50\pi(256y - 32y^2 + y^3)dy = 50\pi\left[128y^2 - \frac{32}{3}y^3 + \frac{y^4}{4}\right]_0^8 = 50\pi\left(\frac{11264}{3}\right) \approx 589\ 782$$

pies–libras.

6.13. INTEGRAL DEFINIDA EN OTRAS APLICACIONES

APLICACIONES A LA ADMINISTRACIóN Y ECONOMÍA

Estas aplicaciones serán mostradas directamente con ejemplos, puesto que aparecen a menudo en el trabajo con derivadas de funciones reales que representan al costo, ingreso, utilidad, oferta, demanda, etc.

PROBLEMA 1. Suponga que la función de costo marginal de una empresa manufacturera de un cierto producto se calcula con la fórmula $C'(x) = 2 - 0{,}2x$, $0 \leq x \leq 8$, donde el costo marginal está dado en miles de dólares y la producción es de "x" unidades por día. ¿Cuál es el

cambio total en el costo diario para pasar de un nivel de producción de 2 a 6 unidades diarias? Interpretar.

Solución

Nos dan $C'(x) = 2 - 0{,}2x, 0 \leq x \leq 8$

Reescribiendo para integrar: $\frac{dC(x)}{dx} = 2 - 0{,}2x \;\rightarrow\; dC(x) = (2 - 0{,}2x)$

Piden $C = C_2^6 = \int_2^6 dC(x) \;=\; \int_2^6 (2 - 0{,}2x)dx \;=\; [2x - 0{,}1x^2]_2^6 \;=\; 2(6) - 0{,}1(6)^2 - 2(2) + 0{,}1(2)^2 = 4{,}8$.

Esto denota que los costos totales de una producción que en un día aumenta de 2 a 6 unidades es de 4 800 dólares.

El intervalo $I = [0;\ 8]$ da a entender que la función únicamente es válida en ese intervalo.

PROBLEMA 2. Una fábrica grande cercana a un río descarga en este contaminantes, con una rapidez que el Departamento de Control de Calidad de Aguas calcula mediante la fórmula $P'(t) = t\sqrt{t^2+1}$, con $0 \leq t \leq 5$, donde $P(t)$ es el número total de toneladas de contaminante descargado en el agua después de "t" años en que la empresa viene funcionando. ¿Qué cantidad de contaminantes se habrá descargado en el río durante los 3 primeros años de funcionamiento y cuánto entre el 2do. y el 4to. año?

Solución.

Nos dan $P'(t) = t\sqrt{t^2+1}$, con $0 \leq t \leq 5$.

Reescribiendo para integrar: $\frac{dP(t)}{dt} = t\sqrt{t^2+1} \;\rightarrow\; dP(t) = (t\sqrt{t^2+1})dt$

a) Piden calcular la cantidad de contaminantes arrojados los tres primeros años. Esto es:

$P = P_0^3 = \int_0^3 dP(t) = \int_0^3 (t\sqrt{t^2+1})dt = \left[\frac{1}{2}(t^2+1)^{3/2}\right]_0^3 = \frac{1}{2}(3^2+1)^{3/2} - \frac{1}{2}(0^2+1)^{3/2} = 10{,}2$ Ton.

En conclusión, durante los tres primeros años la fábrica ha arrojado al río 10,2 toneladas de contaminantes.

El intervalo $I = [0;\ 5]$ significa que la función únicamente es válida en ese intervalo.

b) Respecto a la cantidad de contaminante que la empresa descarga entre el segundo y cuarto año de su funcionamiento, se calcula:

$P = P_2^4 = \int_2^4 dP(t) \;=\; \int_2^4 (t\sqrt{t^2+1})dt \;=\; \left[\frac{1}{2}(t^2+1)^{3/2}\right]_2^4 \;=\; \frac{1}{2}(4^2+1)^{3/2} - \frac{1}{2}(2^2+1)^{3/2} \;=$ 29,45 Ton.

6.14. LISTA DE EJERCICIOS PROPUESTOS

TEOREMAS FUNDAMENTALES DEL CÁLCULO.

1. Hallar la derivada de las siguientes funciones:

a) $G(x) = \int_a^x Cos\ t\ dt$

b) $G(x) = \int_x^2 (u - e^u + 2u^2)\ du$

2. Determinar la derivada de las siguientes funciones:

a) Si $G(x) = \int_a^{\sqrt{x}} Ln\ t\ dt$

b) Si $G(x) = \int_x^{x^3} t\sqrt{1+t^2}\ dt$

c) Si $G(x) = \int_{x-x^2}^{x+x^2} \left(\frac{1}{t^2}\right) dt$

3. Evaluar:

a) $N = \int_2^3 x^3 dx$

b) $N = \int_0^2 e^x\ dx$

c) $N = \int_0^\pi Sen\ x\ dx$

d) $N = \int_1^e Ln\ x\ dx$

e) $N = \int_{1/2}^{5/2} \frac{1}{x}\ dx$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

1. Evaluar:

a) $N = \int_3^8 4\ dx$

b) $N = \int_0^3 (3x^2 + x - 1)\ dx$

c) $N = \int_{-1}^1 x(x^2+1)^3\ dx$

d) $N = \int_0^3 |2x - 3|\ dx$

e) $N = \int_{-1}^{-1} \left(x - \frac{1}{x^2}\right)\ dx$

2. Evaluar:

a) $N = \int_0^{\pi/2} Sen(2x)\ dx$

b) $N = \int_{\pi/3}^{\pi/2} (x + Cos\ x)\ dx$

c) $N = \int_{\pi/2}^{2\pi/3} Sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\ dx$

ÁREA BAJO UNA CURVA.

1. Dibuje la región cuya área se indica mediante la integral definida propuesta. Después calcule el valor de la integral mediante una fórmula geométrica.

a) $N = \int_{-r}^{r} 5\, dx$ b) $N = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$ c) $N = \int_{0}^{5} (2x + 5)\, dx$

2. Realizando las gráficas en cada caso:

a) Encuentre el área de la región D bajo la curva $y = x^4 - 2x^3 + 2$ entre $x = -1$, $x = 2$. Respuesta: $5{,}1 unid^2$.

b) Hallar el área comprendida entre la parábola $y = x^2 + 2x - 3$ y el eje X.

c) Determine el área que está comprendida entre la curva $y = x^3 - x + 2$, las rectas $x = -1$, $x = 2$.

d) Identificar el área comprendida entre la parábola cúbica $y = x^3 - x^2 - 6x$ y el eje X.

HALLAR EL ÁREA ENTRE DOS CURVAS.

1. Desarrolle según se pide.

a) Hallar el área comprendida entre la curva $y = \sqrt{x}$; la recta $y = 6 - x$, y el eje X, en el primer cuadrante.

b) Bosqueje la región D limitada por $y = x + 6$; $y = x^3$; $2y + x = 0$. Posteriormente determine su área.

c) Hallar el área de la región comprendida entre las gráficas de las funciones $y = |2x|$ y la parábola $y = 2x^2 + x - 4$.

2. Desarrolle según se pide:

a) Hallar el área limitada por las gráficas de las curvas $y = x^2$, $y = x^3$.

b) Hallar el área de la región limitada por la curva cerrada $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

c) Hállese el área limitada por las gráficas de las curvas $x = y(y-1)(y-2)$; $x = y(2-y)$

3. Determinar el área de la región encerrada por las curvas representadas por las funciones $f(x) = 3 + 2x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 4x + 3$

INTEGRAL DEFINIDA Y EL VOLUMEN POR SECCIONES PLANAS CONOCIDAS.

1. Calcular el volumen de un sólido, cuya base tiene forma circular de radio 2 y sus secciones transversales tiene forma cuadrada. La diagonal de cada cuadrado que forma la sección transversal es perpendicular al eje X y se encuentra sobre el plano XY.

2. Encuentre el volumen del sólido, cuya base es un triángulo rectángulo sobre el plano XY con secciones transversales perpendiculares al eje X y con forma de triángulo equilátero. Uno

de los catetos del triángulo que forma la base mide 6 metros y es paralelo al eje Y; el otro cateto mide 4 metros y es paralelo el eje X.

3. Sea D la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = 2\sqrt{x}$, la recta horizontal $y = 6$ y el eje Y. Encuentre el volumen del sólido generado al tomar la región D como base para colocar semicírculos perpendiculares al eje X.

4. Resuelva el ejercicio anterior (Nº 3), si se toma la región D como base para colocar triángulos equiláteros perpendiculares al eje X, haciendo contacto la hipotenusa de cada triángulo equilátero con la base.

VOLÚMENES DE REVOLUCIÓN .

1. Resolver los siguientes ejercicios:

a) Encuentre el volumen del sólido generado por la rotación de la región D limitada por las curvas dadas, en torno al eje indicado:

(i) $y = \frac{4}{x}, x = 1, x = 4, y = 0$; giro alrededor del eje X.

(ii) $y = x^2, x = 2, y = 0$; giro alrededor del eje Y.

(iii) $y = 4$ con $x \geq 0, x = 0, y = 0$; giro alrededor de la recta $x = 2$.

(iv) $x = \sqrt{2y}, y = 2, x = 0, y = 0$; giro alrededor de la recta $y = 3$.

b) La región D acotada por las curvas $y = 2 + Sen(x)$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2\pi$ se hace girar alrededor del eje Y. Encuentre el volumen que resulta.

c) Calcular el área de la región D que está limitada por la función $y = x\sqrt{x+1}$ e $y = 0$. Si se hace girar esta región alrededor del eje X; calcular el volumen del sólido así generado.

2. La superficie limitada por las curvas $y = Sen(x)$, $y = Cos(x)$ entre $x = \pi/4$, $x = 5\pi/4$ genera varios sólidos de revolución. Calcular el volumen cuando gira alrededor de:

(i) El eje Y. (ii) La recta $y = 0$. (iii)La recta $y = -2$

3. La región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x$. Si se hace girar alrededor de:

(i) el eje X. Hallar el volumen del sólido generado.

(ii) el eje Y. Hallar el volumen del sólido generado.

LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA.

1. Determinar la longitud de la curva $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ desde $x = 1$ hasta $x = 3$. Respuesta: $S = \frac{53}{6}$ unidades.

2. Resuelva los siguientes ejercicios:

a) Encuentre la longitud del arco de la curva $y = x^{3/2}$, entre los puntos (1; 1) y (4; 8).

b) Determine la longitud de arco de la curva $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$ entre $x = 1, x = 4$.

c) Identifique la longitud de arco de la curva $y = \frac{x^4+3}{6x}$ entre $x = 1, x = 4$.

INTEGRAL DEFINIDA Y CENTRO DE GRAVEDAD DE UNA REGIÓN PLANA. MOMENTOS.

1. Calcular el centro de gravedad de las láminas de densidad uniforme limitadas por las gráficas de las ecuaciones dadas a continuación:

a) $y = \sqrt{x}; y = 0; x = 4$

b) $x = 4 - y^2; x = 0$

c) $y = \frac{1}{x}; y = 0; 1 \leq x \leq 4$

d) $y = \frac{1}{2}(x^2 - 10); y = 0$ entre $x = -2$ y $x = 3$

INTEGRAL DEFINIDA Y EL ÁREA DE SUPERFICIES DE REVOLUCIóN.

1. Calcular el área de la superficie de revolución generada al hacer girar la curva plana dada alrededor del eje X.

a) $y = \frac{x^3}{3}$ con $0 \leq x \leq 3$

b) $y = \sqrt{x - 1}$ con $2 \leq x \leq 5$

c) $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$ con $1 \leq x \leq 2$

2. Determinar el área de la superficie de revolución generada al hacer girar la curva plana dada alrededor del eje Y.

a) $y = \sqrt[3]{x} + 2$ con $1 \leq x \leq 8$

b) $y = 4 - x^2$ con $0 \leq x \leq 2$

3. Hallar el centro de gravedad de la superficie limitada por $y = x^2 - 2x - 3; y = 6x - x^2 - 3$
Respuesta. $(\bar{x}; \bar{y}) = (2; 1)$

INTEGRAL DEFINIDA Y EL VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN REAL.

1. Encuentre el valor promedio de la función planteada en el intervalo dado:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$, en $x \in [1;\ 8]$

b) $f(x) = Sen\ x$, en $x \in [-\pi;\ \pi]$

c) $f(x) = \frac{1}{12}t^3 - 3t^2 + 2t + 70$, en $x \in [0; 6]$

2. Hallar el valor promedio de la función de velocidad planteada en el intervalo dado:

a) $v(t) = 3t^3 + 2$, en $1 \leq t \leq 4$

b) $v(t) = t^{1/2}$, en $2 \leq t \leq 9$

c) $v(t) = 1500e^{0,06t}$, en $0 \leq t \leq 5$

3. Desarrolle lo siguiente:

a) Calcule el valor medio de la función $f(x) = 500 - 50x$ en el intervalo $I = [0; 10]$

b) Calcule el valor medio de la función $f(t) = \sqrt{1+t}$ en el intervalo $I = [3; 8]$

4. Si la temperatura $C(t)$ de un hábitat artificial varía según la fórmula $C(t) = t^3 - 2t + 10$, $0 \leq t \leq 2$, (en grados Celsius) en un lapso de 2 horas, ¿cuál es la temperatura promedio de este periodo?

5. En las peores cuatro horas de un huracán, la velocidad del viento en millas por hora está dada por $V(t) = 5t - t^2 + 100$, $0 \leq t \leq 4$. ¿Cuál es la velocidad promedio del viento en dicho periodo?

6. Si la temperatura a las t horas, en grados Fahrenheit se modela por $T(t) = 60 + 5t - \frac{1}{2}t^2$, $0 \leq t \leq 10$, hallar el máximo, mínimo y el valor promedio de la temperatura en el periodo de las 10 primeras horas.

7. Si un equipo se evalúa en $V(t) = 6500 - 120t - 51t^2$ dólares al cabo de t años, encontrar su valor promedio durante el primer año de uso. Asimismo en el tercer año, y, luego, en los 10 primeros.

8. Suponga que el inventario de cierto artículo t meses después del primer mes del año se calcula aproximadamente con el modelo $I(t) = 10 + 36t - 3t^2$ para $0 \leq t \leq 12$. Hallar el inventario promedio en el segundo trimestre del año.

9. Una población está disminuyendo de acuerdo con la fórmula $P(t) = \frac{2\times10^6}{t+1}$, donde t es el tiempo. Encuentre el tamaño promedio de la población entre $t = 1$ y $t = 2$.

INTEGRAL DEFINIDA Y EL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA.

1. Resolver los siguientes problemas para obtener Trabajo:

a) Calcular el trabajo realizado para elevar a 10 pies de altura, un saco de azúcar de 100 libras.

b) Con una fuerza de 750 libras se comprime en 3 pulgadas un resorte, desde su longitud natural de 15 pulgadas. Calcular el trabajo realizado al comprimir dicho resorte 3 pulgadas más. Respuesta: 3375 pulgadas–libras.

c) Se llena de agua un depósito rectangular con una base de 4 por 5 pies y una altura de 4 pies (el agua pesa 62,4 libras por pie cúbico). ¿Cuánto trabajo se realiza al bombear afuera el agua por encima del borde superior (i) si se vacía la mitad del depósito o (ii) si se vacía todo?

INTEGRAL DEFINIDA EN OTRAS APLICACIONES.

1. (Análisis marginal) Las ecuaciones de costo, ingreso y utilidad marginal de una empresa (en millares de dólares) son: $C'(1)$; $R'(x) = 10 - 2x$; $P'(x) = R'(x) - C'(x)$, para $0 \leq x \leq 10$, donde x es el número de unidades producidas cada día. Encuentre el cambio en (i) costo; (ii) ingreso; y (iii) utilidad para pasar de un nivel de producción de 2 a 4 unidades diarias.

2. (Valor de recuperación) Una parte nueva de repuesto en un equipo industrial se deprecia al principio rápidamente. Después, a medida que transcurre el tiempo, la rapidez de depreciación de su valor es más lenta. Suponga que la rapidez (en dólares por año) con la cual cambia el valor en libras de una nueva máquina moledora, se calcula aproximadamente con la fórmula $V'(t) = f(t) = 500(t - 12)$, $0 \leq t \leq 12$, donde $V(t)$ es el valor de la máquina después de "t" años. Calcule la pérdida total del valor de la máquina para los 5 primeros años y luego para los próximos 5. Escriba las integrales correspondientes y resuelva.

3. (Costo de mantenimiento) Los costos de mantenimiento de un departamento generalmente aumentan a medida que el edificio es más antiguo. Según registros anteriores, una empresa de servicios determina que la razón de incremento en los costos de mantenimiento (en dólares por año) de un conjunto habitacional se calcula aproximadamente con la fórmula $M'(x) = f(x) = 90x^2 + 5000$; donde x es la edad del departamento en años y $M(x)$ es el costo total (acumulado) de mantenimiento por "x" años. Escriba una integral definida que dará los costos totales de mantenimiento desde 2 hasta 7 años, después de haberse construido ese departamento y evalúe esa integral.

4. Las ecuaciones de costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal de una empresa, en miles de dólares diarios, son:

$$\left.\begin{array}{r} C'(x) = 1 \\ R'^{(x)} = 10 - 2x \\ P'(x) = R'(x) - C'(x) \end{array}\right\}, 0 \leq x \leq 10$$

Donde x es el número de unidades producidas cada día. Encuentre el cambio en:

a) Costo b) Ingreso c) Utilidad

A fin de traspasar el nivel de producción de 2 a 4 unidades diarias.

5. Las ecuaciones de costo marginal, ingreso marginal y utilidad marginal de una empresa, en miles de dólares diarios, son:

$$\left.\begin{array}{r} C'(t) = 0{,}5t + 2 \\ R'(t) = 10 - 0{,}5t \\ P'(t) = R'(t) - C'(t) \end{array}\right\}, 0 \leq t \leq 20$$

Donde t es el número de unidades producidas cada día. Encuentre el cambio en:

a) Costo b) Ingreso c) Utilidad

para elevar el nivel de producción de 2 a 4 unidades diarias.