Capítulo IV

APLICACIONES DE LA DERIVADA

CAPÍTULO IV

APLICACIONES DE LA DERIVADA

CONTENIDO

4.1. Velocidad y aceleración usando derivadas.

4.2. La regla de L'Hopital.

4.3. Razones de cambio relacionadas.

4.4. Primera derivada y monotonía de las funciones reales.

4.5. Valores extremos de las funciones reales.

4.6. Segunda derivada y concavidad de la gráfica de una función real.

4.7. Bosquejo de curvas polinomiales y racionales.

4.8. Segunda derivada y valores extremos relativos.

4.9. Diferenciales y cálculo de errores relativos y errores porcentuales.

4.10. Listado de ejercicios propuestos.

4.1. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN USANDO DERIVADAS

En las aplicaciones de la derivada se tiene diversas interpretaciones, dependiendo del campo donde se esté empleando; algunas de estas son:

Razón de cambio de un suceso, tasa de crecimiento/decrecimiento de una población, índice de consumo, velocidad de un móvil, rapidez de un suceso, pendiente de una curva en un punto, entre otras más.

VELOCIDAD DE UN MÓVIL.

PROBLEMA 1. Un automóvil que corre por un camino recto viaja a una distancia modelada por $S(t) = t^2 + 4t$ millas en t horas, ¿cuál es su velocidad instantánea a las 3 horas? ¿Cuánta es su aceleración en ese mismo tiempo?

Solución.

Siendo la función distancia recorrida $S(t) = t^2 + 4t$

Su velocidad será $v(t) = S'(t) = 2t + 4$, siendo $v(3) = 2(3) + 4 = 10$ millas por hora.

Su aceleración ha de ser $a(t) = S''(t) = 2$, siendo $a(2) = 2$ millas por hora, en cada hora.

PROBLEMA 2. Supongamos que una partícula se mueve por una línea recta a razón de $S(t) = 3t + 9t^2 + t^3$pies en t segundos. ¿Cuáles serán su velocidad instantánea y su aceleración al final de 5 segundos?

Solución.

Siendo la función que rige la distancia recorrida $S(t) = 3t + 9t^2 + t^3$

Su velocidad será $v(t) = S'(t) = 3 + 18t + 3t^2$.

En $t = 5$ segundos: $v(5) = 3 + 18(5) + 3(5)^2 = 168$ pies por segundo.

Su aceleración habrá de ser $a(t) = S''(t) = 18 + 6t$.

En $t = 5$ segundos: $a(5) = 18 + 6(5) = 48$ pies por segundo en cada segundo.

PROBLEMA 3. (Efecto Doppler) La sirena de un coche de bomberos es percibida por un observador con una frecuencia calculada mediante $F(v) = \frac{132400}{331 \pm v}$, donde $\pm v$ representa la velocidad del vehículo. Hallar la razón de cambio de F respecto a v cuando:

a) El coche se está aproximando a 30 metros por segundo [Usar "$-v$"].

b) El coche se está alejando a 30 metros por segundo [Usar "$+v$"].

Solución.

La razón de cambio de "F" respecto a "v" es dada por la derivada de "F", es decir, por $F'(v) = \frac{-132400}{(331\pm v)^2}$.

Calculamos $F'(-30) = -1{,}4613$; lo cual denota que al acercarse el coche de bomberos a 30 metros por segundo, el observador percibe la sirena con una razón de cambio en la frecuencia de 1,4613.

Ahora $F'(30) = -1{,}01595$; esto significa que al alejarse el coche de bomberos a 30 metros por segundo, el observador percibe la sirena con una razón de cambio en la frecuencia de 1,01595.

4.2. LA REGLA DE L'HOPITAL

Los siguientes casos de formas indeterminadas: $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ pueden ser resueltos mediante las reglas de L'Hopital que se enuncian a continuación.

TEOREMA 1. Caso $\left(\frac{0}{0}\right)$ Si $\underset{x\to x_0}{Lím}\ f(x) = 0$, $\underset{x\to x_0}{Lím}\ g(x) = 0$ y existe $\underset{x\to x_0}{Lím}\ \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces se cumple que $\underset{x\to x_0}{Lím}\ \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to x_0}{Lím}\ \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Donde x_0 puede ser un n° real, $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 1. Al sustituir el x_0 en la función, se obtendrá una forma indeterminada; la cual será resuelta al aplicar la regla de L'Hopital.

a) Al calcular $\underset{x\to 0}{Lím}\frac{1-Cos\,x}{x^2} = \frac{0}{0}$, obtenemos una forma indeterminada, aplicamos entonces regla de L'Hopital, derivando numerados y denominador: $\underset{x\to 0}{Lím}\frac{1-Cos\,x}{x^2} = \underset{x\to 0}{Lím}\frac{Sen\,x}{2x} = \frac{0}{0}$; nuevamente resulta una forma indeterminada, por lo que volvemos a aplicar L'Hopital:

$$\underset{x\to 0}{Lím}\frac{Sen\,x}{2x} = \underset{x\to 0}{Lím}\frac{Cos\,x}{2} = \frac{1}{2}$$

b) Al calcular $\underset{x\to 0}{Lím}\ \frac{2x^3}{x-Sen\,x} = \frac{0}{0}$, aplicamos L'Hopital: derivando numerados y denominador.

$\underset{x\to 0}{Lím}\ \frac{2x^3}{x-Sen\,x} = \underset{x\to 0}{Lím}\ \frac{6x^2}{1-Cos\,x} = \frac{0}{0}$. En base a esta respuesta, volvemos a aplicar L'Hopital:

$\underset{x\to 0}{Lím}\ \frac{12x}{Sen\,x} = \frac{0}{0}$, una vez más volvemos a aplicar L'Hopital:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{12}{Cos\,x}=\frac{12}{1}=12.$

TEOREMA 2. Caso $\left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$: Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\pm\infty$ y existe $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces se cumple que $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Donde x_0 puede ser un n° real, $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo 2. Del mismo modo, al sustituir el x_0 en la función se obtendrá una forma indeterminada, la cual será resuelta al aplicar la regla de L'Hopital.

a) Al calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{Ln\,x}{x^2+2}=\frac{+\infty}{+\infty}$, aplicamos L'Hopital: derivando numerados y denominador.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{+\infty}=0$$

b) Al calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{Sen\,x}\right]=+\infty-\infty$, transformamos a forma indeterminada $\frac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{Sen\,x-x}{x\,xen\,x}=\frac{0}{0}$, aplicamos L'Hopital: derivando numerados y denominador.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{Cos\,x-1}{Sen\,x+x\,Cos\,x}=\frac{0}{0}$, volvemos a aplicar regla de L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{-Sen\,x}{Cos\,x+Cos\,x-x\,Sen\,x}=\frac{0}{2}=0$$

c) Al calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}[Ln(x+1)-Ln\,x]=+\infty-\infty$, aplicamos propiedades de logaritmos.

$$\lim_{x\to+\infty}[Ln(x+1)-Ln\,x]=\lim_{x\to+\infty}Ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}Ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=Ln\,1=0$$

d) Al calcular $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\,Ln\,x)=0(+\infty)$, aplicamos $f\cdot g=\frac{f}{1/g}$ o $f\cdot g=\frac{g}{1/f}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x\,Ln\,x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{Ln\,x}{1/x}=\frac{+\infty}{+\infty}$, aplicamos L'Hopital.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

e) Al calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+2Cos\,x)^{\frac{1}{Cos\,x}}=1^{+\infty}$, usando logaritmo neperiano transformamos:

$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+2Cos\,x)^{\frac{1}{Cos\,x}} \quad \rightarrow \quad Ln\,A = Ln\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+2Cos\,x)^{\frac{1}{Cos\,x}}\right]$

$Ln\,A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} Ln(1+2Cos\,x)^{\frac{1}{Cos\,x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{Cos\,x}\right)\cdot Ln(1+2Cos\,x)$

Al calcular $Ln\,A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{Ln(1+2Cos\,x)}{Cos\,x} = \frac{0}{0}$, aplicamos regla de L'Hopital.

$Ln\,A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{-2\,Sen\,x}{1+2\,Cos\,x}}{-Sen\,x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1+2Cos\,x} = 2 \quad \rightarrow \quad Ln\,A = 2 \Leftrightarrow A = e^2$

De donde, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+2Cos\,x)^{\frac{1}{Cos\,x}} = e^2$.

f) Al calcular $\lim_{x\to 0^+} (x)^x = 0^0$, usando logaritmo neperiano transformamos:

$A = \lim_{x\to 0^+} (x)^x \rightarrow \quad Ln\,A = Ln\left[\lim_{x\to 0^+} (x)^x\right] \rightarrow \quad Ln\,A = \lim_{x\to 0^+} Ln(x)^x$

$Ln\,A = \lim_{x\to 0^+} x\,Ln\,x = 0(+\infty)$, empleamos $f\cdot g = \frac{f}{1/g}$ o $f\cdot g = \frac{g}{1/f}$

Al calcular $Ln\,A = \lim_{x\to 0^+} \frac{Ln\,x}{1/x} = \frac{+\infty}{+\infty}$, aplicamos regla de L'Hopital.

$Ln\,A = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} \quad \rightarrow \quad Ln\,A = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$

$Ln\,A = 0 \Leftrightarrow A = e^0 = 1$

De donde, $\lim_{x\to 0^+} (x)^x = 1$.

g) Al calcular $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x^2})^{Tan\,x} = (+\infty)^0$, usando logaritmo neperiano transformamos:

$A = \lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x^2})^{Tan\,x} \quad \rightarrow \quad Ln\,A = Ln\left[\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x^2})^{Tan\,x}\right]$

$Ln\,A = \left[\lim_{x\to 0^+} Ln(\frac{1}{x^2})^{Tan\,x}\right] \rightarrow \; Ln\,A = \lim_{x\to 0^+} (Tan\,x)Ln(\frac{1}{x^2})$

$Ln\,A = \lim_{x\to 0^+} (Tan\,x)(Ln\,1 - \ln x^2) \rightarrow \quad Ln\,A = \lim_{x\to 0^+} (Tan\,x)(-2Ln\,x)$

$Ln\,A = -2\lim_{x\to 0^+} (Tan\,x)(Ln\,x) = 0(+\infty)$, empleamos $f\cdot g = \frac{f}{1/g}$ o $f\cdot g = \frac{g}{1/f}$

$Ln\,A = -2\lim_{x\to 0^+} \frac{Ln\,x}{\frac{1}{Tan\,x}} = \frac{+\infty}{+\infty}$, aplicamos regla de L'Hopital.

$Ln\,A = -2\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/Sen^2x} = 2\lim_{x\to 0^+} \frac{Sen^2x}{x} = \frac{0}{0}$ aplicamos regla de L'Hopital.

$Ln\ A = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{2Sen\,x\,Cos\,x}{1} = 2(0) = 0.$

Luego, $Ln\ A = 0 \Leftrightarrow A = e^0 = 1$

De donde, $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x^2})^{Tan\,x} = 1$.

4.3. RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS

Esta es una aplicación de la derivación implícita y la regla de la cadena. Consiste en plantear y resolver problemas donde se calcula razones de cambio de dos o más variables relacionadas entre sí, generalmente con respecto a otra variable, alguna de las cuales puede ser el tiempo t. Estos problemas corresponden a sucesos que se presentan en momentos fijos o particulares; es como tomar una foto del suceso en el instante, por tanto, se plantea y resuelve el problema para ese momento fijo, tal como se verá en adelante.

PROBLEMA 1. Un barco S está viajando cerca de la costa con una velocidad y una aceleración desconocidas. En un faro L un observador toma medidas de la distancia "r" entre él y el barco, y el ángulo θ de la visual del barco con la línea de la costa. En un determinado momento t_0, encuentra que $r = 6$, $\frac{dr}{dt} = 3$, $\theta = \frac{\pi}{3}$, $\frac{d\theta}{dt} = -3$. Encuentre $\frac{dy}{dt}$, es decir, la razón en que aumenta la distancia desde el barco hacia la costa, en el instante t_0.

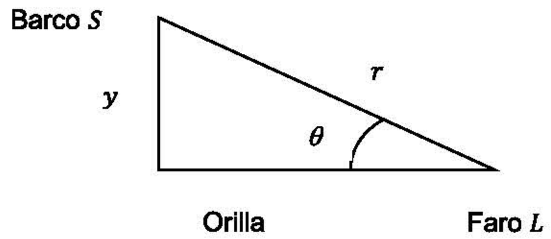


Figura 4.1

Según la Figura 4.1, $y = r\,Sen(\theta)$, donde y representa la distancia del barco a la orilla; "y", "r" y "θ" dependen del tiempo "t".

Derivando "y" respecto al tiempo se tendrá $\frac{dy}{dt} = r\,Cos\,\theta \frac{d\theta}{dt} + Sen\,\theta \frac{dr}{dt}$

Remplazando los datos para el tiempo t_0 dados se tiene $\frac{dy}{dt} = (6)Cos(\pi/3)(-3) + Sen(\pi/3)(3) =-6,4$.
Esto simboliza la razón en que aumenta la distancia del barco a la costa, en el instante t_0.

PROBLEMA 2. Una escalera de 13 m de largo se apoya contra una pared vertical muy alta. En el instante t_0, el extremo inferior a cinco metros de la pared está resbalando hacia fuera a una velocidad de 2 metros por segundo.

a) ¿A qué velocidad se está deslizando hacia abajo el extremo superior de la escalera en el instante t_0?

b) Una persona se encuentra sobre la escalera a 8 metros sobre el suelo, en el instante t_0. ¿A qué velocidad se está aproximando al suelo?

Solución.

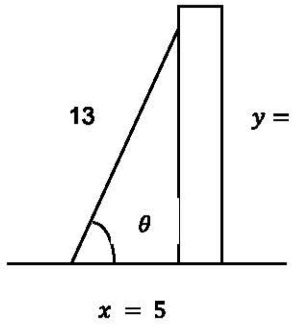


Figura 4.2

De la figura 4.2, se desprende $y = 13\ Sen(\theta)$, $x = 13\ Cos(\theta)$.

(a) Derivando ambos lados de "y" y "x" con respecto al tiempo "t"

$\frac{dy}{dt} = 13Cos\ \theta \frac{d\theta}{dt}$ y $\frac{dx}{dt} = -13Sen\ \theta \frac{d\theta}{dt}$ y como $\frac{dx}{dt} = 2$, entonces $\frac{d\theta}{dt} = \frac{-2}{13\ Sen\ \theta}$

Por otro lado, reemplazando en $\frac{dy}{dt}$ se tiene $\frac{dy}{dt} = 13Cos\ \theta \frac{-2}{13Sen\ \theta} = -2Cot\ \theta = \frac{-2x}{y}$
Y como en el instante t_0, $x = 5$, $y = 12$, se tendrá que $\frac{dy}{dt} = -\frac{5}{6}$

Esto significa que en el instante t_0 el extremo superior de la escalera está deslizándose hacia abajo con una velocidad de 5/6 metros por segundo.

(b) Tomando como z la altura en que se encuentre la persona, por semejanza de triángulos:

$\frac{z}{y} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \rightarrow \quad z = \frac{2y}{3} \rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dy}{dt}$

De donde, $\frac{dz}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dy}{dt}$; y en el instante t_0 se tiene $\frac{dy}{dt} = \frac{2}{3}\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{5}{9}$

En consecuencia, la persona está cayendo al piso con una velocidad de 5/9 metros por segundo.

PROBLEMA 3. Supongamos que cierta población de pájaros $B(t)$ y otra de mosquitos $M(t)$ se encuentran en equilibrio cuando se satisface el modelo $13B^2 + 12MB = M^2$. Determinar la rapidez con la que aumenta la población de pájaros $\frac{dB}{dt}$ cuando $B = 200$, $M = 2600$ y $\frac{dM}{dt} = 1000$ por año.

Solución.

Tanto B como M dependen del tiempo "t" en el modelo $13B^2 + 12MB = M^2$, derivemos ambos lados con respecto a "t": $13B\,\frac{dB}{dt} + 6M\,\frac{dB}{dt} + 6B\,\frac{dM}{dt} = M\,\frac{dM}{dt}$ o $\frac{dB}{dt} = \frac{\frac{dM}{dt}(M-6B)}{13B+6M}$

Reemplazando los datos dados se obtiene que $\frac{dB}{dt} = 76{,}92$, es decir, la rapidez con la cual aumenta la población de pájaros es de 76,92 por año.

PROBLEMA 4. Un recipiente tiene la forma del cono de la Figura 4.3, y el agua está fluyendo hacia su interior a razón de 2 cm³ por minuto. ¿A qué velocidad se está elevando el nivel del agua cuando el recipiente se llena hasta una altura de h cm?

Solución.

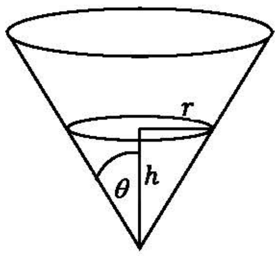


Figura 4.3

De la Figura 4.3, se obtiene la siguiente relación: Tan $\theta = \frac{r}{h}$.
De donde, $r = h\,Tan\,\theta$, siendo que r y h dependen del tiempo t y θ es constante
El volumen es dado por $V = \frac{1}{3}\pi\,(h\,Tan\,\theta)^2 h = \frac{\pi}{3}h^3 Tan^2\theta$
Derivando V con respecto al tiempo: $\frac{dV}{dt} = \pi\,(Tan^2\theta)h^2\,\frac{dh}{dt}$ y como $\frac{dV}{dt} = 2$
Finalmente, $\frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi\,Tan^2\theta\,h^2}$ resulta la velocidad con que se eleva el nivel del agua.

PROBLEMA 5. Un émbolo S se desplaza hacia arriba y hacia abajo en un cilindro. En cualquier instante, su posición S (en milímetros) arriba del centro ($S = 0$) está relacionada con su velocidad V (en milímetros por segundo) por la ecuación $S^2 + V^2 = 16$. Hallar la aceleración de este pistón en el momento que se encuentra a 2 milímetros arriba del centro. (Ver Figura 4.4).

Solución.

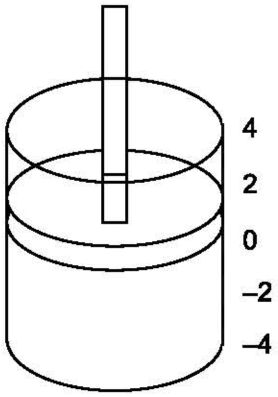


Figura 4.4

Recordemos que la aceleración es dada por $a(t)=\frac{dV}{dt}$ y por regla de la cadena $a(t)=\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dS}\cdot\frac{dS}{dt}$

Derivando ambos lados de $S^2+V^2=16$ con respecto a t, se tiene $\frac{dV}{dt}=-\frac{S}{V}$

Entonces $a(t)$ será $a(t)=\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dS}\cdot\frac{dS}{dt}=-\frac{S}{V}\cdot V=-S$

Calculando para $S=2$ milímetros, $V=\pm\sqrt{16-2^2}=\pm\sqrt{12}$

De donde $a(2)=-2$ milímetros por segundo por segundo.

Esto significa que el émbolo se desacelera (velocidad decreciente) cuando se encuentra a dos milímetros por encima de la posición central.

PROBLEMA 6. Un ciclista y un tren se están aproximando a una intersección a lo largo de trayectorias perpendiculares. En el momento en se encuentran equidistantes de la intersección, el ciclista estima que la distancia entre él y el tren está disminuyendo a 40 millas por hora. Si la rapidez en que se mueve el ciclista es de 15 millas por hora, ¿con cuánta velocidad se está moviendo el tren?

Solución.

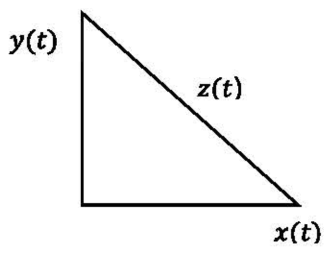


Figura 4.5

En la Figura 4.5, $x(t)$ es la distancia de la bicicleta respecto a la intersección en el tiempo "t"; $y(t)$, la del tren a la intersección en el tiempo "t"; $z(t)$ es la distancia entre el tren y la bicicleta en el tiempo "t". La distancia es en millas y estas se encuentran relacionadas por la ecuación $x^2+y^2=z^2$.

Para hallar la velocidad del tren $\frac{dy}{dt}$, se deriva ambos lados de la ecuación con respecto a "t" y se obtiene $2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$.
Donde la velocidad es dada por $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y}\left(z\frac{dz}{dt} - x\frac{dx}{dt}\right)$

En el momento en que el ciclista y el tren se encuentran equidistantes de la intersección, $x = y$ se tiene que $z = \sqrt{2}y$

Con los siguientes datos: $\frac{dx}{dt} = -15$, $x = y$, $\frac{dz}{dt} = -40$ sustituimos en $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{y}\left(z\frac{dz}{dt} - x\frac{dx}{dt}\right)$ y se tiene $\frac{dy}{dt} = -41{,}57$

Esto significa que se están aproximando (signo negativo) a 41,57 millas por hora.

4.4. PRIMERA DERIVADA Y MONOTONÍA DE LAS FUNCIONES REALES

FUNCIÓN CRECIENTE O DECRECIENTE.

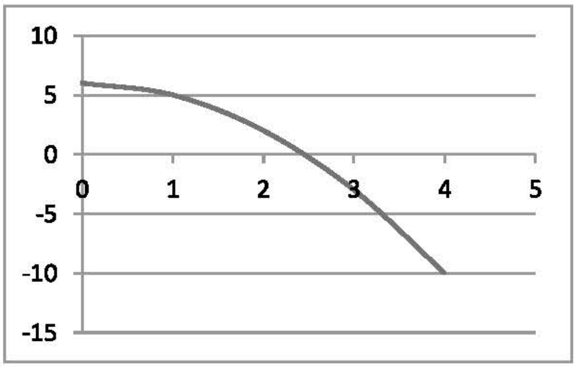
DEFINICIÓN. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real definida en el intervalo $I \subset R$, se dice que:

a) La función f es no creciente sobre el intervalo I si para cada par de valores x_1 y x_2 de I se cumple si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. (Ver Figura 4.6).

b) La función f es estrictamente decreciente sobre el intervalo I si para cada par de valores x_1 y x_2 de I se cumple si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. (Ver Figura 4.7).

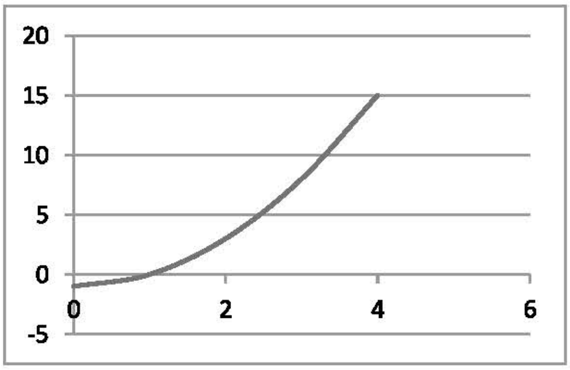
c) La función f es no decreciente sobre el intervalo I si para cada par de valores x_1 y x_2 de I se cumple si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

d) La función f es estrictamente creciente sobre el intervalo I si para cada par de valores x_1 y x_2 de I se cumple si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.



La función f es no creciente.

Figura 4.6



La función f es no decreciente.

Figura 4.7

PRIMERA DERIVADA Y MONOTONÍA (**FUNCIÓN** CRECIENTE/DECRECIENTE) .

TEOREMA. Sea $f: I\subset R\to R$ una función real continua definida en el intervalo $I\subset R$ y derivable en el interior de I,

a) Si $f'(x) > 0$ para todo $x\epsilon I$, entonces f es creciente en I.

b) Si $f'(x) < 0$ para todo $x\epsilon I$, entonces f es decreciente en I.

c) Si $f'(x) = 0$ para todo $x\epsilon I$, entonces f es constante en I.

Ejemplo 1. Sea la función $f(x) = x^2 - 6x + 12$, determina r en que intervalo es creciente y en cuál es decreciente.

Solución. Calculamos primero la derivada de $f(x) = x^2 - 6x + 12$. Esta es $f'(x) = 2x - 6$.

Buscamos donde f es creciente y/o decreciente.

Es creciente en $f'(x) > 0 \to 2x - 6 > 0 \to x > 3$, es decir, en $J = \langle 3;\ +\infty\rangle$.

Es decreciente en $f'(x) < 0 \to 2x - 6 < 0 \to x < 3$, es decir, en $K = \langle -\infty; 3\rangle$. (Ver Figura 4.8).

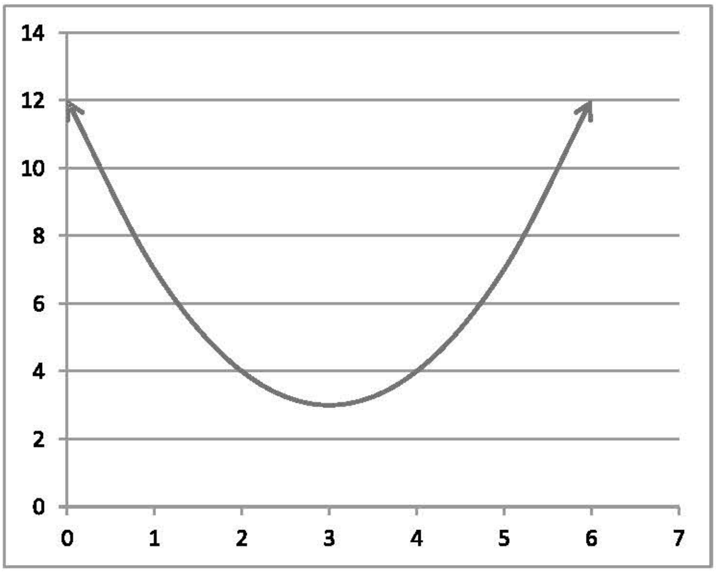


Figura 4.8

Ejemplo 2. Para la función $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 7$, determinar los intervalos donde f es creciente y donde es decreciente.

Solución. La derivada de $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 7$ es $f'(x) = -6x^2 + 12x + 12$.

Buscamos donde f es creciente: $f'(x) > 0 \to -6x^2 + 12x + 12 > 0$

Es decir, f es creciente en el intervalo $J = \langle -1;\ 2\rangle$.

Buscamos donde f es decreciente: $f'(x) < 0 \to -6x^2 + 12x + 12 < 0$

Es decir, f es decreciente en el intervalo $K = \langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 2; +\infty\rangle$. (Ver Figura 4.9).

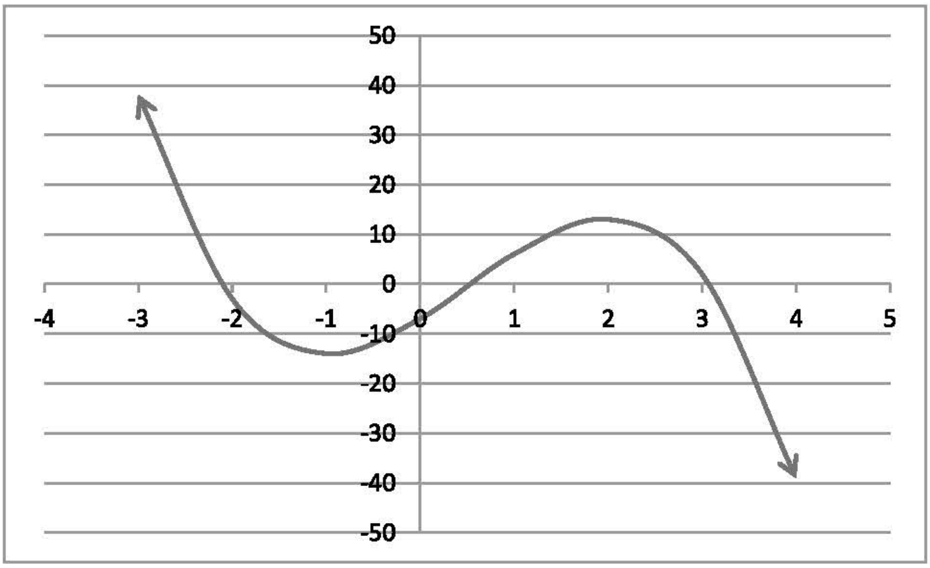


Figura 4.9

PUNTO DE INFLEXIÓN .

DEFINICIÓN. Sea $f: I\subset R \to R$ una función real continua en el punto x_0 . Decimos que el punto $(x_0; f(x_0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de la función f, si f es cóncava hacia arriba a un lado de x_0 y cóncava hacia abajo al otro lado.

Los puntos —de existir— concurren en los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$ o cuando $f''(x)$ no existe.

Ejemplo 1. Encuentre los puntos de inflexión de la curva representada por la función $f(x) = x^3 - 12x$.

Solución. La derivada de orden uno: $f'(x) = 3x^2 - 12$.

La derivada de orden dos es $f''(x) = 6x$.

Los puntos de inflexión se encuentran de $f''(x) = 0 \ \to\ 6x = 0 \to\ x = 0$.

El punto de inflexión es $(x_0; f(x_0))$ =(0; 0). (Ve Figura 4.10).

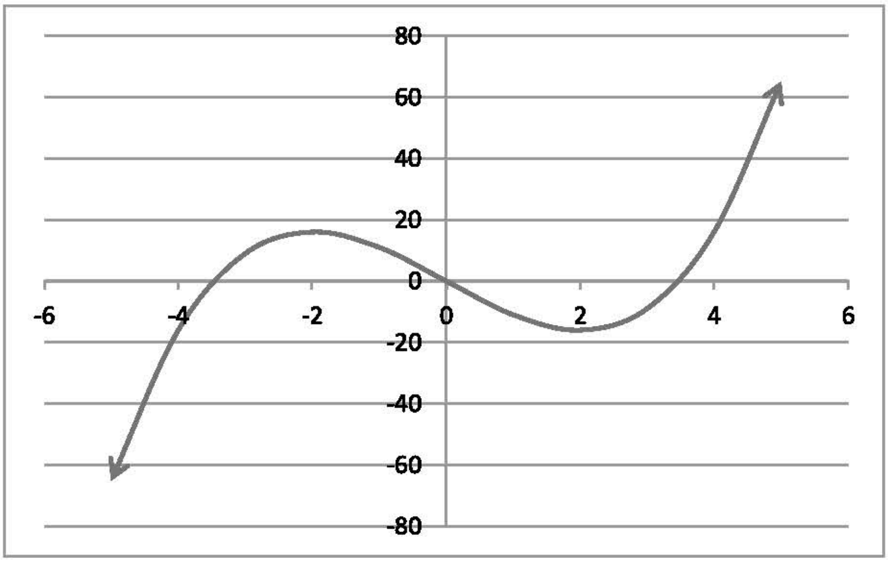


Figura 4.10

4.5. VALORES EXTREMOS DE LAS FUNCIONES REALES

EXTREMOS DE UNA FUNCIóN REAL : VALORES MÍNIMO Y MÁXIMO DE UNA FUNCIóN REAL

INTRODUCCIÓN . Observemos la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ para $-1 \leq x \leq 2{,}5$.

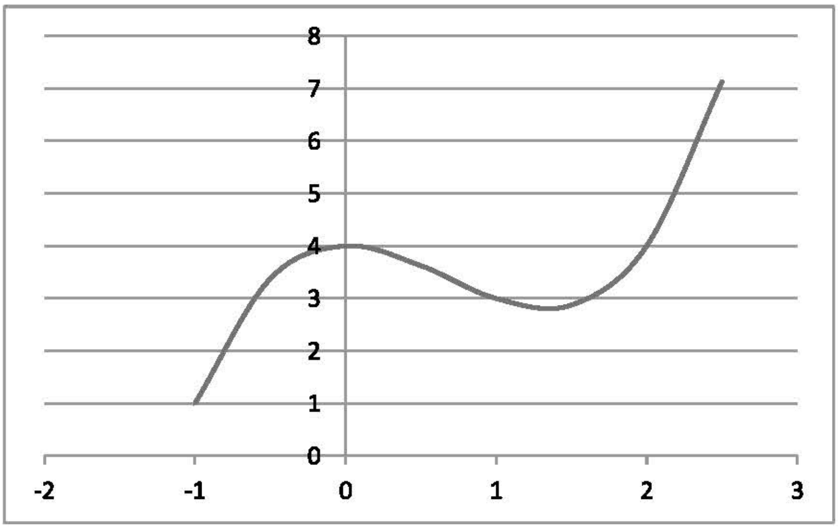


Figura 4.11

En la Figura 4.11, se observa lo siguiente:

a) El valor más grande de la función se da en $x = 2{,}5$, este es llamado máximo absoluto y el valor máximo es $f(2{,}5) = 7{,}25$. El valor más pequeño de la función se da en $x = -1$ y es denominado mínimo absoluto y el valor mínimo es $f(-1) = 1$.

b) En el valor $x = 0$ se da un máximo, al que se nombra máximo relativo (ocurre en un subintervalo del dominio); y, en el valor $x = 1{,}5$ se da un mínimo que es llamado mínimo relativo (ocurre en otro subintervalo del dominio).

DEFINICIÓN 1 (MÍNIMO Y MÁXIMO ABSOLUTO). Sea $f: I \subset R \to R$ una función real de variable real y sea x_0 un punto de $I = [a; b]$, entonces:

a) $m = f(x_0)$ es el mínimo (o mínimo absoluto) de f en I si y solo si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.

b) $M = f(x_0)$ es el máximo (o máximo absoluto) de f en I si y solo si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$.

TEOREMA. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real de variable real, continua en el intervalo cerrado I, entonces f tiene máximo absoluto y mínimo absoluto en I.

DEFINICIÓN 2 (MÍNIMO Y MÁXIMO RELATIVOS). Sea $f: I \subset R \to R$ una función real de variable real definida en el intervalo I, sea el intervalo $J \subset I$ un intervalo abierto y sea $x_0 \in J$, entonces:

a) Si f tiene un mínimo en J, $f(x_0)$ llamado mínimo relativo.

b) Si f tiene un máximo en J, $f(x_0)$ denominado máximo relativo.

Nota. A los valores mínimos o máximos también se les llama valores extremos de la función f.

DEFINICIÓN 3 (PUNTO CRÍTICO). Sea $f: I \subset R \to R$ una función real de variable real continua definida en el intervalo I. Un valor x_0 de I es llamado punto crítico de f si cumple:

a) $f'(x_0) = 0$, o b) $f'(x)$ no existe, o c) x_0 es un extremo del intervalo I.

OBSERVACIÓN. Los valores extremos solo ocurren en puntos críticos.

EXTREMOS DE UNA **FUNCIÓN** DEFINIDA EN INTERVALO CERRADO.

Si $f: I \subset R \to R$ es una función real de variable real, continua en el intervalo cerrado I, sus valores extremos se hallan siguiendo estos pasos:

a) Se halla los puntos críticos de f en I.

b) Se evalúa cada punto crítico en la función f.

c) El menor de tales valores es el mínimo absoluto y el mayor, el máximo absoluto.

Ejemplo 1. Hallar los valores extremos de la función $f(x) = 2 + 2x - x^2$ para $x \in [-0{,}6;\ 2]$.

Solución.

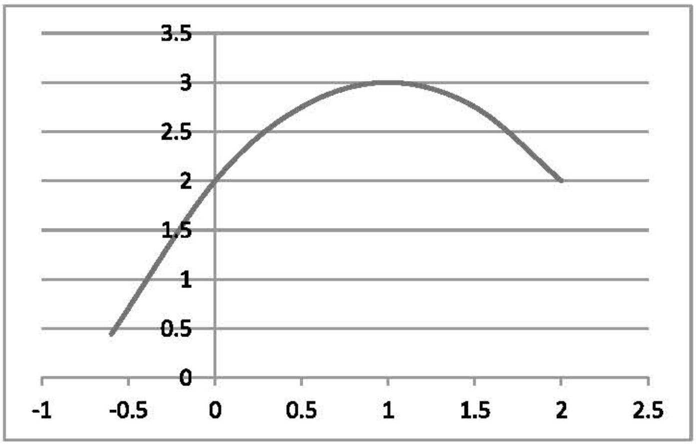


Figura 4.12

a) Hallamos los puntos críticos (existe tres formas de obtenerlos):

i) $f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2 - 2x = 0$, entonces: $x = 1$.

ii) $f'(x)$ siempre existe, aquí no hay $P.C.$

iii) Los extremos del intervalo son $x = -0{,}6$, $x = 2$. Entonces $P.C. = \{-0{,}6;\ 1;\ 2\}$

b) Evaluamos $f(-0{,}6) = 0{,}44$, $\qquad f(1) = 3 \qquad f(2) = 2$.

c) El mínimo absoluto es $f(-0{,}6) = 0{,}44$; y, el máximo absoluto es $f(1) = 3$. (Ver Figura 4.12).

Ejemplo 2. Hallar los valores extremos de la función $g(x) = 2x - 3x^{2/3}$ para $0 \leq x \leq 8$, cuya gráfica se muestra a continuación.

Solución.

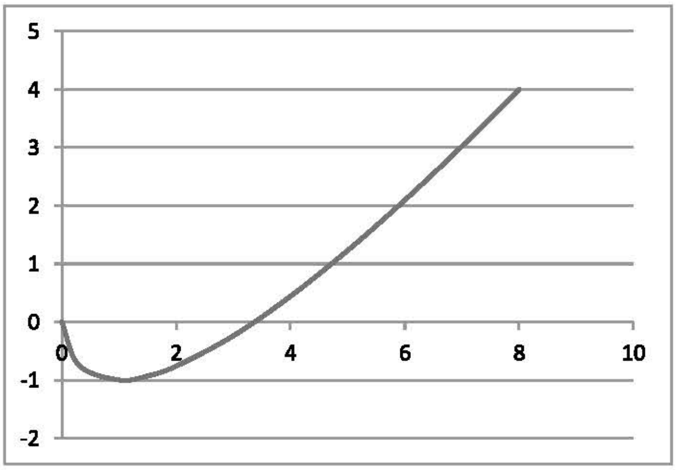


Figura 4.13

a) Hallamos los puntos críticos (con las tres formas de obtenerlos):

i) $g'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 2 - 2x^{-1/3} = 0$, entonces $x = 1$.

ii) $g'(x) = 2 - 2x^{-1/3}$, no existe si $x = 0$.

iii) Los extremos del intervalo son: $x = 0$, $x = 8$. Entonces los puntos críticos son $PC = \{0;\ 1;\ 8\}$

b) Evaluamos $f(0) = 0$ $\qquad f(1) = -1$ $\qquad f(8) = 4$.

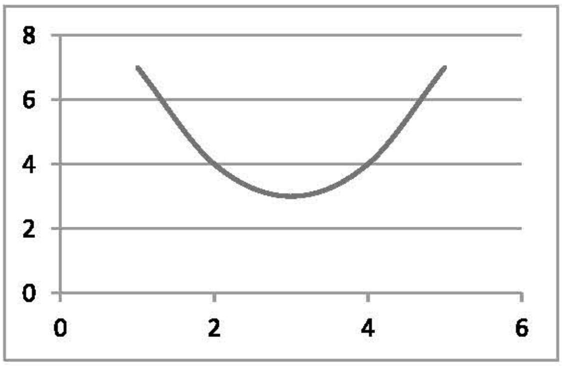
c) El mínimo absoluto es $f(1) = -1$; y, el máximo absoluto es $f(8) = 4$. (Ver Figura 4.13).

4.6. SEGUNDA DERIVADA Y CONCAVIDAD DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN REAL

TEOREMA. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real que admite derivada de segundo orden en el intervalo abierto $I \subset R$.

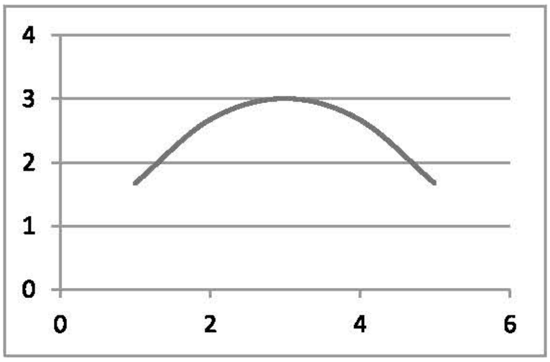
a) Si $f''(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava hacia arriba en I. (Ver Figura 4.14).

b) Si $f''(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava hacia abajo en I. (Ve Figura 4.15).



La función f es cóncava hacia arriba.

Figura 4.14



La función f es cóncava hacia abajo.

Figura 4.15

Ejemplo 1. Sea la función $f(x) = 4 - 2x - x^2$ hallar donde f es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

Solución. La derivada de orden uno es $f'(x) = -2 - 2x$.

a) La función f es creciente si $f'(x) > 0 \rightarrow -2 - 2x > 0 \rightarrow x < -\frac{1}{2}$.

Es creciente en $x \in \left\langle -\infty; -\frac{1}{2} \right\rangle$

b) La función f es decreciente si $f'(x) < 0 \to -2 - 2x < 0 \to x > -\frac{1}{2}$.

Es decreciente en $x \in \left\langle -\frac{1}{2}; +\infty \right\rangle$

c) La derivada de orden dos es $f''(x) = -2$.

La función f es cóncava hacia abajo en todo R, pues $f''(x) = -2 < 0$. (Ve Figura 4.16).

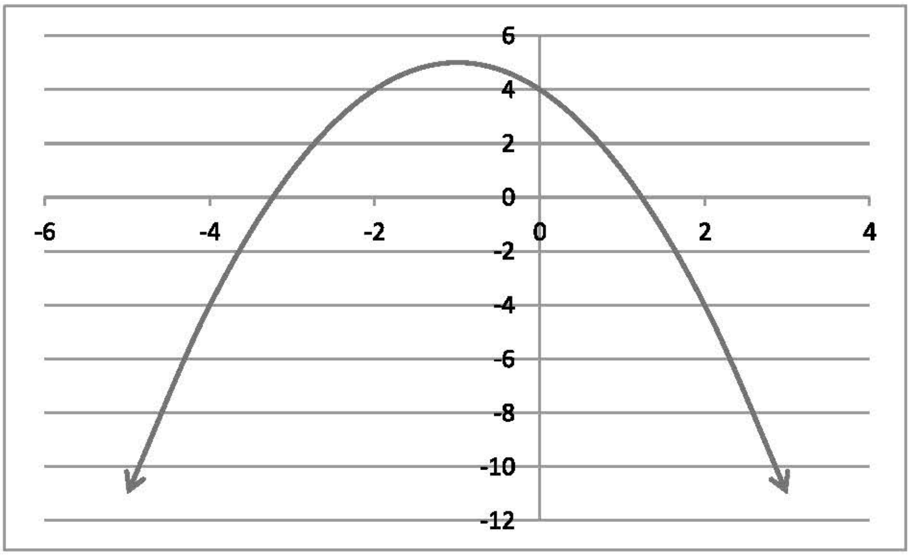


Figura 4.16

Ejemplo 2. Determine en qué intervalos del dominio, la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ es creciente, decreciente, cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.

Solución. La derivada de orden uno es $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$.

La derivada de orden dos es $f''(x) = 60x^3 - 30x$.

a) La función f es creciente si $f'(x) > 0 \to 15x^4 - 15x^2 > 0 \to x \in (\langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle)$.

Es creciente en el intervalo $J = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$.

b) La función f es decreciente si $f'(x) < 0 \to 15x^4 - 15x^2 < 0 \to x \in (\langle -1; 0 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle)$.

Es creciente en el intervalo $K = \langle -1; 0 \rangle \cup \langle 0; 1 \rangle$.

c) La función f es cóncava hacia arriba si $f''(x) > 0 \to 60x^3 - 30x > 0$.

Es cóncava hacia arriba en el intervalo $J = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0 \right\rangle \cup \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty \right\rangle$.

d) La función f es cóncava hacia abajo si $f''(x) < 0 \to 60x^3 - 30x < 0$.

Es cóncava hacia arriba en el intervalo $K = \left\langle -\infty; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle \cup \langle 0; \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$. (Ver figura 4.17).

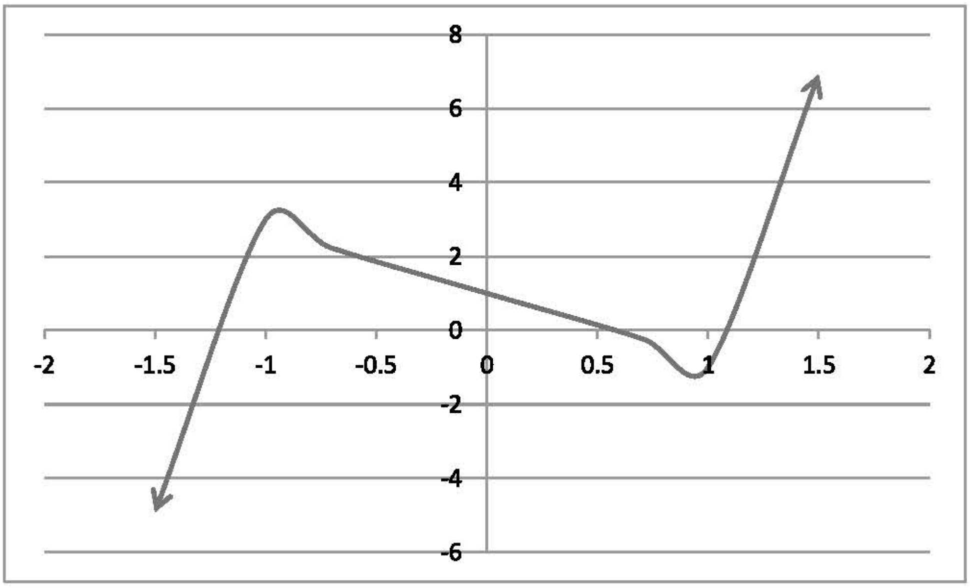


Figura 4.17

4.7. BOSQUEJO DE CURVAS POLINOMIALES Y RACIONALES

Ejemplo 1. Usando derivadas, graficar la función $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 40$ y mostrar sus elementos más importantes.

Solución.

1) El dominio de la función es todo el conjunto de los números reales $Dom(f) = R$.

2) Hallamos las derivadas de orden 1 y de orden 2:

$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15$ y $f''(x) = 6x - 12$

3) Hallamos los puntos críticos de la función, igualamos a cero de derivada de orden 1:

$3x^2 - 12x - 15 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 4x - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad (x-5)(x+1) = 0$

$\rightarrow \quad PC = \{-1; 5\}$

4) Buscamos donde f es creciente o decreciente:

Es creciente si $f'(x) > 0$: $3(x-5)(x+1) > 0 \rightarrow x\epsilon\langle -\infty; -1\rangle \cup \langle 5; +\infty\rangle$

Es decreciente si $f'(x) < 0$: $3(x-5)(x+1) < 0 \rightarrow x\epsilon\langle -1; 5\rangle$

Obsérvese aquí lo siguiente: $\underbrace{\langle -\infty; -1\rangle}_{crece} \cup \underbrace{\langle -1; 5\rangle}_{decrece} \cup \underbrace{\langle 5; +\infty\rangle}_{crece}$, entonces en $x = -1$ ocurre un máximo y en $x = 5$ ocurre un mínimo.

5) Buscamos los puntos de inflexión (puntos de cambio de concavidad), igualamos a cero la derivada de orden 2: $f''(x) = 0$

$6x - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$, siendo $y = 6 \quad \rightarrow \quad PI = \{(2; 6)\}$

6) Buscamos las concavidades de la función:

Si $f''(x) > 0$, f es cóncava hacia arriba: $6x - 12 > 0 \rightarrow x\epsilon\langle -\infty; 2\rangle$

Si $f''(x) < 0$, f es cóncava hacia abajo: $6x - 12 < 0 \rightarrow x\epsilon\langle 2; +\infty\rangle$

7) Ubicamos los puntos principales de f con los PC y los PI; y al ordenarlos, son $(-1; 48)$, $(2;\ 6)$, $(5; -60)$

8) Buscamos la intersección con los ejes coordenados.

La intersección de f con el eje Y: se hace $x = 0$ en $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 40$, queda $y = 40$, entonces corta en $y = 40$.

La intersección de f con el eje X: se hace $y = 0$ en $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 40$, entonces corta en $x = -3{,}1$; $x = 1{,}8$; y $x = 7{,}3$.

9) Se ubica en el plano cartesiano los puntos críticos PC y sus ordenadas, el punto de inflexión PI y los puntos de intersección con los ejes coordenados y se traza la curva que se muestra en la figura a continuación.

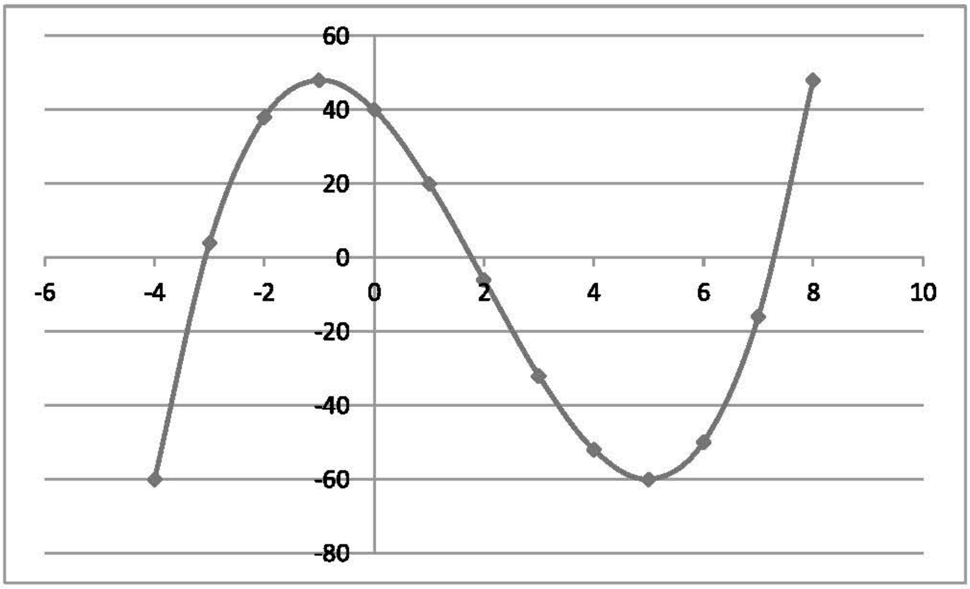


Figura 4.18

Ejemplo 2. Usando derivadas, graficar la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y mostrar sus elementos más importantes.

Solución.

1) El dominio de la función es todo el conjunto de los números reales $Dom(f) = R$.

2) Hallamos las derivadas de orden 1 y de orden 2: $f(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ y $f''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$

3) Hallamos los puntos críticos de la función, igualamos a cero la derivada de orden 1:

$\frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad -2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad PC = \{0\}$

4) Buscamos donde f es creciente o decreciente:

Es creciente si $f'(x) > 0$: $\frac{-2x}{(1+x^2)^2} > 0 \rightarrow x\epsilon\langle -\infty; 0\rangle$

Es decreciente si $f'(x) < 0$: $\frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0 \rightarrow x\epsilon\langle 0; +\infty\rangle$

Obsérvese aquí lo siguiente: $\underbrace{\langle -\infty; 0\rangle}_{crece} \cup \underbrace{\langle 0;\ +\infty\rangle}_{decrece}$, entonces en $x = 0$ ocurre un máximo. Su ordenada respectiva es $y = 1$

5) Buscamos los puntos de inflexión (puntos de cambio de concavidad), igualamos a cero la derivada de orden 2: $f''(x) = 0$

$\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} = 0 \quad \rightarrow \quad 2(3x^2-1) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{3}$

$\rightarrow \quad x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, siendo para ambos $y = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad PI = \{\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}\right)\}$

6) Buscamos las concavidades de la función:

Si $f''(x) > 0$, f es cóncava hacia arriba: $\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} > 0 \rightarrow x\epsilon \langle -\infty; \frac{-\sqrt{3}}{3}\rangle \cup \langle\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\rangle$

Si $f''(x) < 0$, f es cóncava hacia abajo: $\frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3} < 0 \rightarrow x\epsilon \langle\frac{-\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\rangle$

7) Ubicamos los puntos principales de f con los PC y los PI; al ordenarlos, son $(0; 1)$, $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}\right), \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}\right)$ o lo que es lo mismo: $(0; 1)$, $(-0{,}58 ; 0{,}75)$, $(0{,}58 ; 0{,}75)$

8) Buscamos la intersección con los ejes coordenados.

La intersección de f con el eje Y: se hace $x = 0$ en $y = \frac{1}{1+x^2}$, entonces corta en $y = 1$.

La intersección de f con el eje X: se hace $y = 0$ en $y = \frac{1}{1+x^2}$; lo cual resulta absurdo, entonces no corta al eje X.

9) Se ubica en el plano cartesiano los puntos críticos PC y sus ordenadas, el punto de inflexión PI y los puntos de intersección con los ejes coordenados y se traza la curva que se muestra en la figura a continuación.

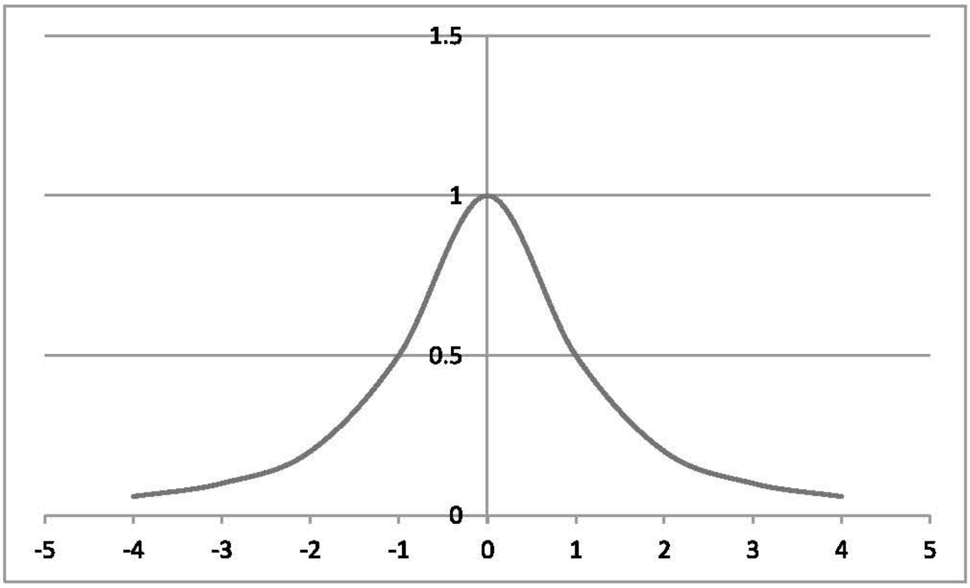


Figura 4.19

Ejemplo 3. Usando derivadas, graficar la función $f(x) = 3x^4 + 4x^3$, así también, mostrar sus elementos más importantes.

Solución.

1) El dominio de la función es todo el conjunto de los números reales $Dom(f) = R$.

2) Hallamos las derivadas de orden 1 y de orden 2:

$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$ y $f''(x) = 36x^2 + 24x$

3) Hallamos los puntos críticos de la función, igualamos a cero la derivada de orden 1:

$12x^3 + 12x^2 = 0 \quad \rightarrow 12x^2(x+1) = 0 \quad \rightarrow x^2(x+1) = 0 \quad \rightarrow x = 0$ o $x = -1$

$\rightarrow \quad PC = \{-1; 0\}$

4) Buscamos donde f es creciente o decreciente:

Es creciente si $f'(x) > 0$: $12x^3 + 12x^2 > 0 \rightarrow x^2(x+1) > 0 \rightarrow x\epsilon\langle -1; 0\rangle \cup \langle 0; +\infty\rangle$

Es decreciente si $f'(x) < 0$: $12x^3 + 12x^2 < 0 \rightarrow x^2(x+1) > 0 \rightarrow x\epsilon\langle -\infty; -1\rangle$

Obsérvese aquí lo siguiente: $\underbrace{\langle -\infty; -1\rangle}_{decrece} \cup \underbrace{\langle -1; 0\rangle}_{crece} \cup \underbrace{\langle 0; +\infty\rangle}_{crece}$, entonces en $x = -1$ ocurre un mínimo local.

5) Buscamos los puntos de inflexión (puntos de cambio de concavidad), igualamos a cero la derivada de orden 2: $f''(x) = 0$

$6x - 12 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$, siendo $y = 6 \quad \rightarrow \quad PI = \{(2; 6)\}$

6) Buscamos las concavidades de la función:

Si $f''(x) > 0$, f es cóncava hacia arriba: $36x^2 + 24x > 0 \rightarrow 6x(6x + 4) > 0 \rightarrow x(6x + 4) > 0$

$\rightarrow x = 0 \;\text{ o }\; x = \frac{-2}{3} \rightarrow x\epsilon \langle -\infty; \frac{-2}{3} \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$

Si $f''(x) < 0$, f es cóncava hacia abajo: $36x^2 + 24x < 0 \rightarrow 6x(6x + 4) < 0 \rightarrow x(6x + 4) < 0$

$\rightarrow x = 0 \;\text{ o }\; x = \frac{-2}{3} \rightarrow x\epsilon \langle \frac{-2}{3}; 0 \rangle$

7) Ubicamos los puntos principales de f con los puntos críticos PC $(-1; -1)$, $(0;\ 0)$ y el punto de inflexión PI $(2; 6)$.

8) Buscamos la intersección con los ejes coordenados.

La intersección de f con el eje Y: se hace $x = 0$ en $y = 3x^4 + 4x^3$, queda $y = 0$, entonces corta en $y = 0$.

La intersección de f con el eje X: se hace $y = 0$ en $y = 3x^4 + 4x^3$, entonces corta en $x = 0$ y en $x = -\frac{4}{3}$

9) Se ubica en el plano cartesiano los puntos críticos PC y sus ordenadas, el punto de inflexión PI, los puntos de intersección con los ejes coordenados y se traza la curva que se muestra a continuación en la Figura 4.20.

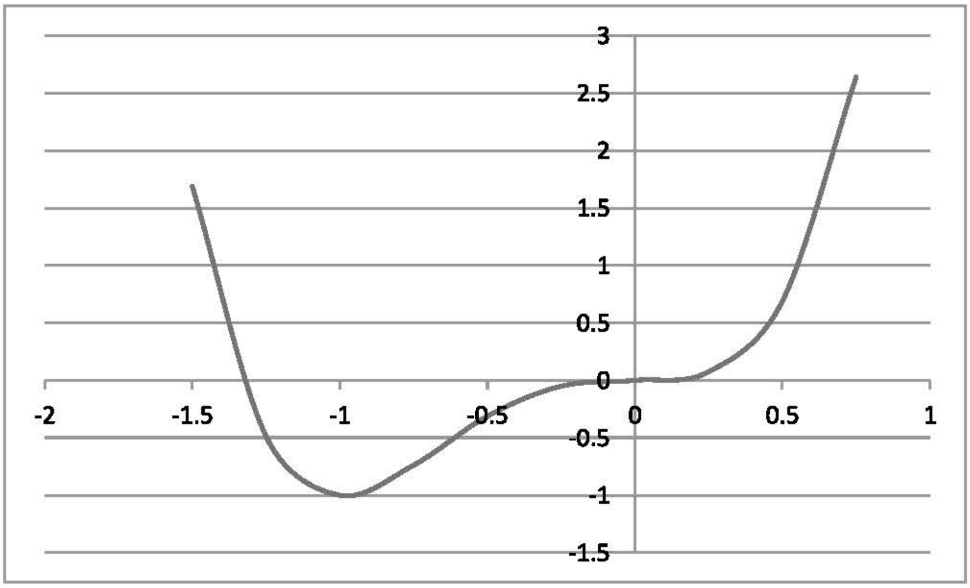


Figura 4.20

4.8. SEGUNDA DERIVADA Y VALORES EXTREMOS RELATIVOS

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA HALLAR VALORES EXTREMOS.

TEOREMA. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real de variable real tal que $f'(x) = 0$ y tal que la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a x_0, entonces:

a) Si $f''(x) > 0, f(x_0)$ es un mínimo relativo. (El máximo relativo es $f(x_0)$).

b) Si $f''(x) < 0, f(x_0)$ es un máximo relativo.(El máximo relativo es $f(x_0)$).

c) Si $f''(x) = 0$, el criterio no es aplicable (usar otro criterio).

Ejemplo 1. Hallar los valores extremos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ para $x \in R$.

Solución.

a) Hallamos los PC: $f'(x) = 0$, $3x^2 - 6x = 0$, entonces $x = 0$ y $x = 2$.

b) Hallamos $f''(x) = 6x - 6$.

c) Evaluamos cada PC en la segunda derivada y aplicamos el teorema:

$f''(0) = -6 < 0$, entonces $f(0) = 0$ es un máximo absoluto.

$f''(2) = 6 > 0$, entonces $f(2) = -4$ es un mínimo relativo. (Ver Figura 4.21).

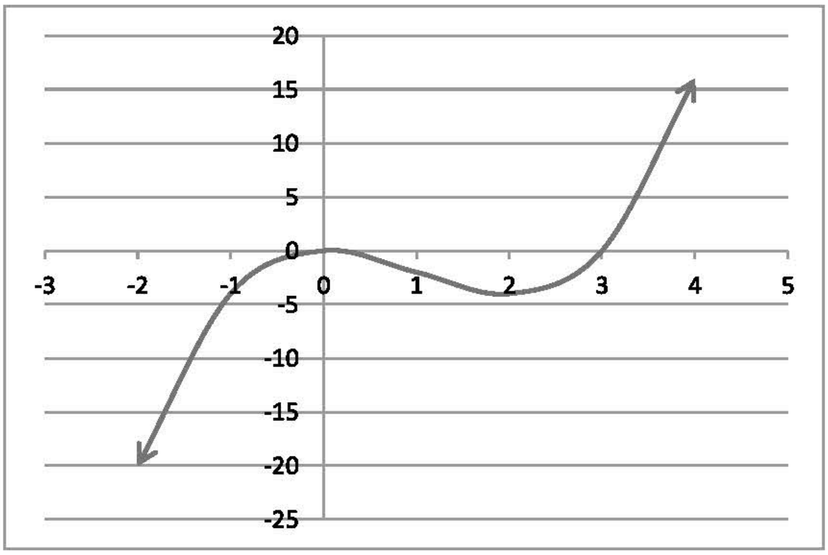


Figura 4.21

Ejemplo 2. Hallar los valores extremos de la función $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 1$ para $x \in R$.

Solución.

a) Hallamos los PC: $f'(x) = 0$, $4x^3 + 3x^2 - 6x = 0$, entonces $x = 0$; $x = 0{,}9$; $x = -1{,}65$.

b) Hallamos la segunda derivada: $f''(x) = 12x^2 + 6x - 6$.

c) Evaluamos cada PC en la segunda derivada y aplicamos el teorema:

$f''(0) = -6 < 0$, entonces $f(0) = 1$ es el máximo relativo.

$f''(0{,}9) = 9{,}12 > 0$, entonces $f(0{,}9) = -0{,}45$ es un mínimo relativo.

$f''(-1{,}65) = 15{,}12 > 0$, entonces $f(-1{,}65) = -4{,}22$ es un mínimo relativo.

(Ver Figura 4.22).

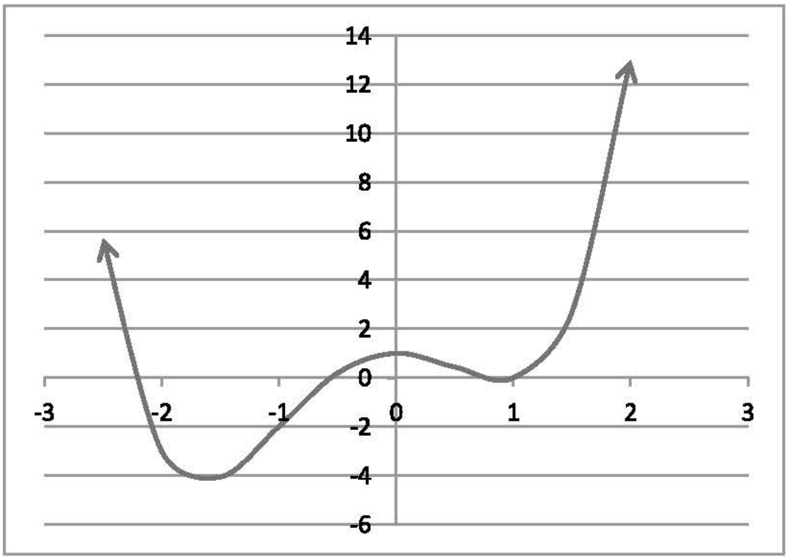


Figura 4.22

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN – APLICACIONES DE LOS VALORES EXTREMOS.

Son problemas de aplicación que consisten en hallar mínimos o máximos específicos como, por ejemplo, los siguientes: máximo beneficio, mínimo costo, máximo beneficio, máxima intensidad, distancia máxima...

Proceso de resolución.

a) Asignar símbolos o letras a todas las cantidades dadas o por determinar. De ser posible elaborar un esquema del problema.

b) Escribir una ecuación primaria para la magnitud que se desea optimizar (hacer mínima o máxima).

c) Reducir o transformar la ecuación primaria en otra que tenga una sola variable independiente. Para esto se puede exigir el uso de ecuaciones secundarias que relacionen las variables independientes de la ecuación primaria.

d) Determinar el dominio de la ecuación primaria, es decir, los valores para los cuales el problema tenga sentido.

e) Hallar el máximo o mínimo por medio de las técnicas ya estudiadas.

PROBLEMA 1. Un ranchero tiene 20 Km de alambrada para delimitar un terreno rectangular a lo largo de un río. Si no fuera necesario que existiese alambrada a la orilla del río, ¿cuál sería el perímetro que produciría el área máxima? ¿Cuál es el área máxima?

Solución.

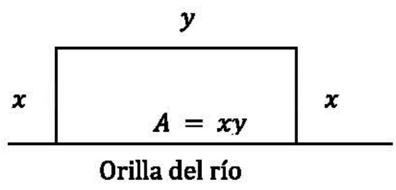


Figura 4.23

a) De la Figura 4.23, sea $x =$ ancho, $y\ =$ largo, $A =$ área, $p =$ perímetro.

b) Se desea maximizar el área (Ecuación primaria): $A = xy$.

c) Como se tiene 20 km de alambrada (perímetro), tiene (ecuación secundaria):

$$p = 2x + y\,; \qquad \text{o} \qquad 20 = 2x + y; \qquad \text{o} \qquad y = 20 - 2x.$$

Reemplazando en la ecuación primaria: $A = xy = x(20 - 2x)$; o $A = 20x - 2x^2$.

d) El dominio. Puesto que A, x e y son dimensiones, deben ser cantidades positivas: $A > 0$, $x > 0$, $y > 0$, de esta última $20 - 2x > 0$, de donde $x < 10$, junto con $x > 0$ se tendrá finalmente $Dom(A) = \langle 0;\ 10\rangle$.

La función área con su dominio serán $A(x) = 20 - 2x, x \in \langle 0;\ 10\rangle$.

e) Hallando área máxima.

Encontramos los PC con los tres criterios:

i) $A'(x) = 0$, entonces ii) $PC = \{5\}$ iii) No hay PC.

f) Aplicamos criterio de la segunda derivada: $A''(x) = -2$, y $A''(5) = -2$ entonces se produce máximo. Las dimensiones del terreno que dan el área máxima serán $x = 5$, $y = 20 - 2(5) = 10$.

El área máxima será $A(5) = 20(5) - 2(5)^2 = 50$.

Nota. Otras dimensiones producirán un terreno de menor área.

PROBLEMA 2. Se desea construir una caja abierta de base cuadrada empleando 108 cm^2 de material. ¿Qué dimensiones tiene una caja de máximo volumen?

Solución.

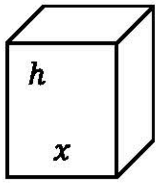


Figura 4.24

a) De la Figura 4.24, sean $x =$ lado de la base, $h =$ altura, $S =$ área del material y $V =$ volumen de la caja.

b) Se desea maximizar el volumen V (ecuación primaria): $V = x^2h$.

c) La cantidad de material disponible es $S =$ 108 cm2 (ecuación secundaria):

$S =$ (Área de la base)+(Área lateral)

$S = x^2 + 4xh$ o $108 = x^2 + 4xh$ o $h = \frac{108-x^2}{4x}$

Reemplazando en la ecuación primaria se tendrá $V = 27x - \frac{x^3}{4}$

d) Se trata de dimensiones de una caja, por lo tanto, $V > 0, x > 0, h > 0$. De estas dos últimas condiciones, se obtiene que $x \in \langle 0; \sqrt{108} \rangle$. La función volumen con su dominio serán $V = 27x - \frac{x^3}{4}$ con $x \in \langle 0; \sqrt{108} \rangle$.

e) Hallando el volumen máximo.

f) Encontramos los PC con los tres criterios:

i) $V'(x) = 0$, entonces $PC = \{6\}$ ii) No hay PC. iii) No hay PC.

g) Aplicamos criterio de la segunda derivada: $V''(x) = -\frac{3}{2}x$, $V''(6) = -9$, entonces se produce máximo. Las dimensiones de la caja que producen el volumen máximo serán $x = 6$, $h = \frac{108-6^2}{4(6)} = 3$.

El volumen máximo será $V(6) = 27(6) - \frac{6^3}{4} = 108 = 108$ cm^3.

Nota. Una caja con otras dimensiones producirá una caja de menor volumen.

PROBLEMA 3. Tanto los biólogos como los psicólogos estudian las respuestas a diversos estímulos. En ciertos animales la respuesta al estímulo se mide por la contracción del iris después de exponer el ojo a una luz brillante. Supóngase que la respuesta se modela por

$S(t) = \begin{cases} t^2, & si\ 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{8}{t}, & si\ t > 2 \end{cases}$, donde "$t$" es el tiempo en segundos después que se concentra la luz en el ojo. ¿En qué instante se presenta la respuesta máxima?

Solución.

El cambio en la definición de $S(t)$ en $t = 2$ hace ver la posibilidad de una discontinuidad por salto o una esquina en $t = 2$.

Como $\underset{t\to 2^-}{Lím}(t^2) = 4$, $\underset{t\to 2^+}{Lím}\left(\frac{8}{t}\right) = 4$, y $S(2) = 4$, se ve que $S(t)$ es continua en $t = 2$.

La posibilidad de una esquina en $t = 2$ se investiga al analizar la derivada (a través de la pendiente) a cada lado de $t = 2$, en efecto, $S'(t) = \begin{cases} 2t, & si\ 0 < t < 2 \\ \frac{-8}{t^2}, & si\ t > 2 \end{cases}$

En $t = 2$: $\underset{t\to 2^-}{Lím}(2t) = 4$, $\underset{t\to 2^+}{Lím}\left(\frac{-8}{t^2}\right) = -2$, lo cual indica que la gráfica de $S(t)$ tiene una esquina en $t = 2$,;esto quiere decir que la derivada no existe en $t = 2$. Además, debemos observar que se pasa de $(+)$ a $(-)$, es decir, ocurrirá un máximo aquí.

a) Hallando puntos críticos con los tres criterios:

i) $S'(t) = 0$, no hay PC.

ii) $S'(t)$ no existe si $t = 2$

iii) En el (intervalo) dominio tiene el extremo t=0.

b) La respuesta máxima se da cuando $t = 2$. (Ver Figura 4.25).

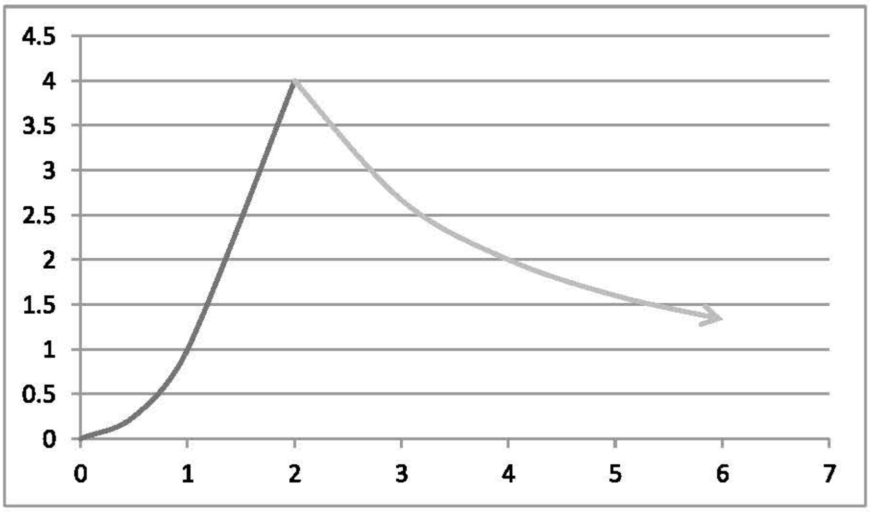


Figura 4.25

4.9. DIFERENCIALES Y CÁLCULO DE ERRORES RELATIVOS Y ERRORES PORCENTUALES

DIFERENCIAL DE UNA FUNCIÓN REAL.

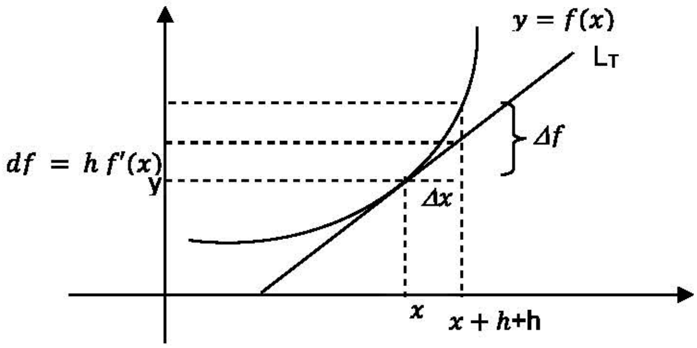


Figura 4.26

DEFINICIÓN. Sea $f: I \subset R \to R$ una función diferenciable y sean x y $x + h$ valores del $Dom(f)$, entonces apoyándose en la Figura 4.26:

a) Al número $\Delta x = (x + h) - x = h$, se le llama incremento de x.

b) Al número $\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$, se le denomina incremento de f en x y además $f(x + h) = f(x) + \Delta f(x)$.

c) La expresión $h \cdot f'(x)$ se denomina diferencial de f en x, el cual se denota por $df = h \cdot f'(x)$.

El incremento de f en x puede ser aproximado mediante la diferenciable f en x, es decir:

$$\Delta f(x) \approx h \cdot f'(x) = \Delta x \cdot f'(x) = f'(x)\, dx$$

De donde, $f(x + h) \approx f(x) + f'(x)\, dx$.

Como $f(x + h)$ puede ser aproximado mediante diferenciales, entonces podemos hallar valores aproximados de la función $y = f(x)$ en las aplicaciones. Además, como $\Delta x = h = dx$, se tiene $df(x) = f'(x)\, dx$.

La diferencial de una función se calcula usando las mismas reglas de derivación de las funciones reales.

Ejemplo 1. Calcular el diferencial de las siguientes funciones:

a) Si $f(x) = Sen(x^2 + 8)$, entonces su diferencial es $df(x) = Cos(x^2 + 8)\, 2x\, dx$.

b) Si $h(x) = u(x) \cdot v(x)$, entonces su diferencial es $df(x) = u \cdot dv + v \cdot du$.

c) Si $y = u^{3/2}$, entonces su diferencial es $dy = \frac{3}{2} u^{1/2}\, du$

d) Si $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, entonces su diferencial es $dh(x) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$.

e) Si $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, entonces su diferencial es $df(x) = \frac{dx}{2\sqrt{x^2-4}}$.

Ejemplo 2. Calcule el valor aproximado de $\sqrt{145}$ y compare con el valor exacto.

Solución.

La función será $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x+h) = \sqrt{x+h}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Si $x = 144$, $h = 1$.

Entonces $f(144) = \sqrt{144} = 12$, $f(144+1) = \sqrt{144+1} = \sqrt{145}$, $f'(x) = \frac{1}{24}$ =0,0416666

Luego, $f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x)$.

Aproximando: $f(144+1) =, f(144) + (1) \cdot f'(144) =, 12 + 0{,}0416666 = 12.0416666$

El valor exacto es $\sqrt{145} = 12{,}0415945$

Se muestra un error de 0,000072021, es bastante aproximado.

Ejemplo 3. Se mide el radio de un círculo y se obtiene una medida aproximada de 30 pulgadas, con un error probable de 0,0025 pulgadas. Al medir el área del círculo, determinar lo siguiente: El error absoluto, el error relativo, el error porcentual y el perímetro del círculo.

Solución.

El radio es $r = 30$ pulgadas y el error en la medida es $dr = \pm 0{,}0025$ pulgadas.

La función que permite hallar el área es $A(r) = \pi r^2$, y su derivada es $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$.

a) El diferencial del área será $dA(r) = 2\pi r\, dr$.

Reemplazando los datos $dA(30) = 2\pi(30)(\pm 0{,}0025) = \pm 0{,}15\pi$ pulgadas cuadradas.

Por tanto, el error absoluto es $dA(30) = \pm 0{,}15\pi$ pulgadas cuadradas.

Lo cual denota que el error total cometido al medir el área del círculo es de $\pm 0{,}15\pi$ pulgadas cuadradas.

b) El error relativo se obtiene de $ER = \frac{dA}{A}$

Reemplazando los datos se obtiene $ER = \frac{\pm 0{,}15\pi}{\pi(30)^2} = \pm 0{,}00017$.

Esto significa que por cada pulgada cuadrada que se mida en el círculo, se está cometiendo un error de $\pm 0{,}00017$.

c) El error porcentual se obtiene de $EP = ER(100)\%$

Reemplazando los datos se llega a $EP = \pm 0{,}00017(100)\% = \pm 0{,}017\ \%$

Se entiende que por cada 100 pulgadas cuadradas que se mida en el área del círculo, se estará cometiendo un error aproximado de $\pm 0{,}017\ \%$.

d) El perímetro del círculo se obtiene de $P = 2\pi r$

Reemplazando los datos se llega a $P = 2\pi(30) = 188{,}495$ pulgadas.

PROBLEMAS DE APLICACIÓN

RESOLVER LOS SIGUIENTES PROBLEMAS:

PROBLEMA 1. (*Cantidad de productos en función del gasto en publicidad*) Utilizando datos registrados se estima que una empresa venderá N unidades de un producto después de gastar $\$x$ miles en publicidad, calculadas mediante la función $N(x) = 60x - x^2$ con $5 \leq x \leq 30$.

a) Determinar $N'(x)$, es decir, la razón de cambio de las ventas por unidad de cambio en dinero gastado en publicidad al nivel de $\$x$ millares.

b) Encontrar $N(10)$ con $N'(10)$, luego $N(20)$ con $N'(20)$ e interpretar.

Solución.

a) Calculamos la derivada de $N(x)$: $\quad N'(x) = 60 - 2x$.

b) Calculamos $N(10) = 500$, lo cual significa que "al gastar 10000 dólares en publicidad, la empresa venderá 500 unidades de su producto".

Y $N'(10) = 40$, es decir que "a un nivel de gastos de 10000 dólares en publicidad, podría haber un incremento de 40 unidades en las ventas al desear incrementar la publicidad en 1000 dólares".

$N(20) = 800$, se entiende que "al gastar 20000 dólares en publicidad, la empresa venderá 800 unidades de su producto".

Y $N'(20) = 20$, significa que "al nivel de gastos de 20000 dólares en publicidad, podría haber un incremento de 20 unidades en las ventas al desear incrementar la publicidad en 1000 dólares".

En la Figura 4.27, se muestra la gráfica de la función $N(x)$.

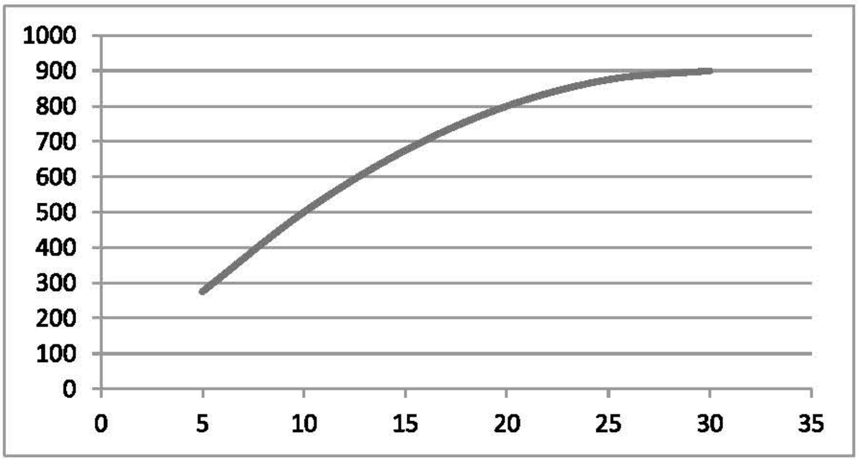


Figura 4.27

Se presenta a continuación la gráfica de la función $N'(x)$ en la Figura 4.28.

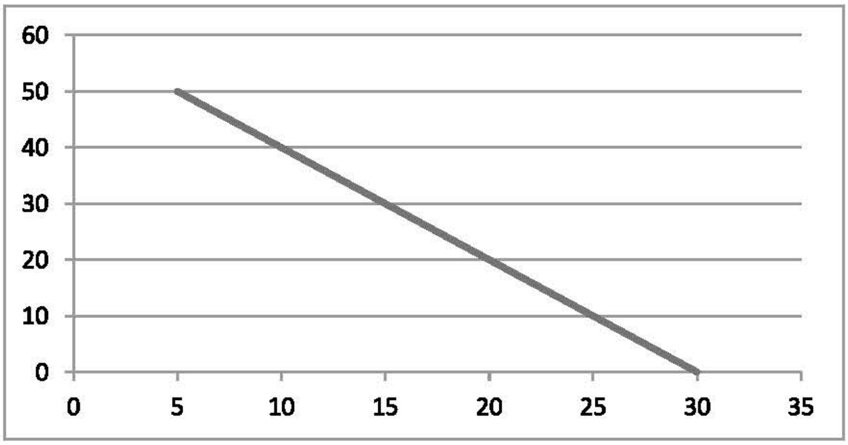


Figura 4.28

PROBLEMA 2. (*Concentración de dióxido de azufre en función de la distancia en millas*) Una planta que genera energía eléctrica mediante la combustión de carbón libera dióxido de azufre al aire circundante. La concentración C en partes por millón se calcula aproximadamente con la fórmula $C(x) = \frac{0,1}{x^2}$, donde "x" es la distancia desde la planta en millas. Calcular la razón de cambio instantánea de la concentración cuando la distancia es de $x = 1$ milla, $x = 1,5$ y $x = 2$ millas.

Solución.

La razón de cambio es dada por la derivada de la función $C(x)$: $C'(x) = -0,2x^{-3}$.

A una milla de distancia, la concentración será de $C(1) = 0,1$ partes por millón y la razón de cambio será de $C'(1) = -0,2$, lo cual da a entender que "a una milla de distancia de la planta, hay una concentración de 0,1 partes por millón de dióxido de azufre y está disminuyendo con una rapidez de 0,2 partes por millón cada milla de distancia".

A una milla y media, la concentración será de $C(1{,}5) = 0{,}044$ partes por millón y la razón de cambio será de $C'(1.5) = -0{,}059$, es decir, "a una milla y media de distancia de la planta, hay una concentración de 0,044 partes por millón de dióxido de azufre y está disminuyendo con una rapidez de 0,059 partes por millón cada milla de distancia".

A dos millas, la concentración será de $C(2) = 0{,}025$ partes por millón y la razón de cambio será de $C'(2) = -0{,}025$, esto significa que "a dos millas de distancia de la planta, hay una concentración de 0,025 partes por millón de dióxido de azufre y está disminuyendo con una rapidez de 0,025 partes por millón cada milla de distancia".

Nota. También podemos observar que cuanto más nos alejamos de la planta, la concentración de dióxido de azufre y su rapidez disminuyen. (Ver Figura 4.29).

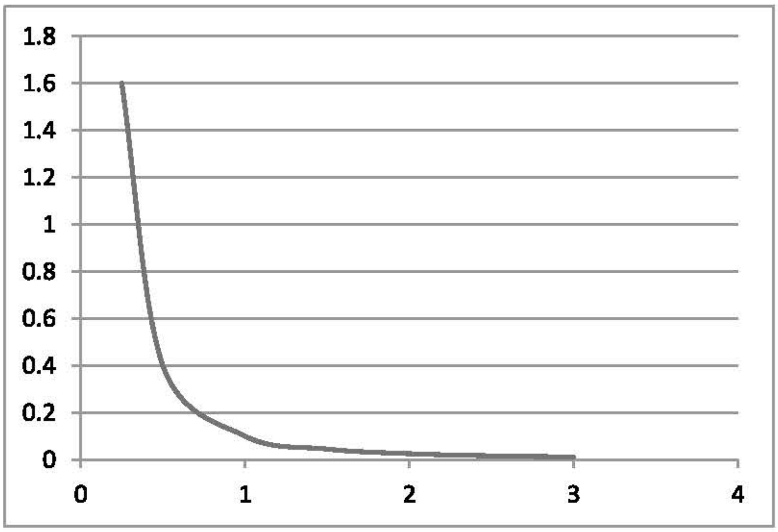


Figura 4.29

PROBLEMA 3. (*Porcentaje del nivel normal de oxígeno en función del tiempo*) La función $f(t) = \frac{t^2-t+1}{t^2+1}$ mide el "porcentaje del nivel normal de oxígeno" que hay en un estanque, donde "t" es el tiempo en semanas, cuantificado desde que el desecho orgánico se arroja en él. Hallar la razón de cambio de "f" respecto a "t", cuando $t = 0{,}5$; $t = 2$ y $t = 8$ semanas.

Solución. La razón de cambio del porcentaje del nivel normal de oxígeno es dada por la derivada de la función $f(t)$, es decir, por $f'(x) = \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}$.

Calculemos lo que piden:

El porcentaje del nivel normal de oxígeno en el estanque para $t = 0{,}5$ es de $f(0{,}5) = 0{,}6$ y la razón de cambio es de $f'(0{,}5) = -0{,}48$. *Significa que a la media semana, la cantidad de oxigeno es del 60 % y está disminuyendo a razón del 48 %.*

El porcentaje del nivel normal de oxígeno en el estanque para $t = 2$ es de $f(2) = 0{,}8$ y la razón de cambio es $f'(2) = -0{,}12$. *Se entiende que a las dos semanas, la cantidad de oxigeno es del 80 % y está disminuyendo a razón del 12 %.*

El porcentaje del nivel normal de oxígeno en el estanque para $t = 8$ es de $f(8) = 0{,}969$ y la razón de cambio es $f'(8) = -0{,}014$. *Significa que a las ocho semanas, la cantidad de oxigeno es del 96,9 % y está disminuyendo a razón del 1,4 %.*

Nota: A medida que el tiempo pasa, el nivel normal de oxígeno tiende a ser del 100%. La velocidad de esa recuperación de oxigeno va disminuyendo.

PROBLEMA 4. (*Temperatura corporal en función de la cantidad de medicamento aplicado*) Una hora después de haberle aplicado a una persona "x" miligramos de cierto medicamento, el cambio en la temperatura corporal T en grados Fahrenheit se calcula aproximadamente con la función $T(x) = x^2\left(1 - \frac{x}{9}\right)$ con $0 \leq x \leq 6$.

La razón con que "t" cambia, respecto a la magnitud de la dosis "x", es $T'(x)$ y se llama sensibilidad del cuerpo a la dosis x.

a) Calcular $T'(x)$ usando regla del producto.

b) Calcular también, $T(1)$ con $T'(1)$; $T'(3)$ con $T'(3)$ y $T(6)$ con $T'(6)$.

Solución.

a) La sensibilidad del cuerpo a la dosis es dada por la derivada de $T(x)$, es decir, por $T'(x) = 2x - \frac{x^2}{3}$.

b) Calculamos lo que piden:

$T(1) = \frac{8}{9}$ y $T'(1) = \frac{5}{3}$, lo cual significa que "cuando se aplica un miligramo del medicamento ,el cambio en la temperatura corporal es de $T(1) = \frac{8}{9} = 0{,}88$ grados Fahrenheit con una razón de cambio de $T'^{(1)} = \frac{5}{3} = 1{,}66$ grados Fahrenheit".

$T(3) = 6$ y $T'(3) = 3$, es decir, "cuando se aplica tres miligramos del medicamento el cambio en la temperatura corporal es de $T(3) = 6$ grados Fahrenheit con una razón de cambio de $T'(3) = 3$ grados Fahrenheit".

$T(6) = 12$ y $T'(6) = 0$, se entiende que "cuando se aplica seis miligramos del medicamento el cambio en la temperatura corporal es de $T(6) = 12$ grados Fahrenheit con una razón de cambio de $T'(6) = 0$ grados Fahrenheit".

En la Figura 3.30, mostramos las gráficas de $T(x)$.

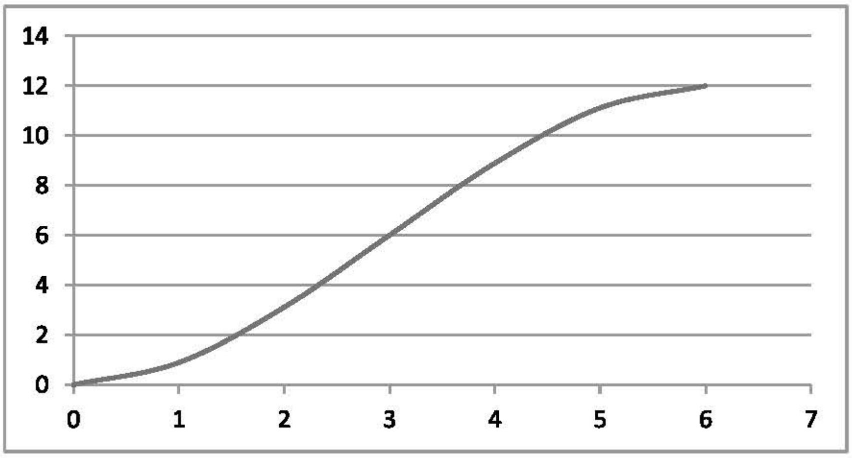


Figura 4.30

A continuación presentamos las gráficas de $T'(x)$ en la Figura 4.31.

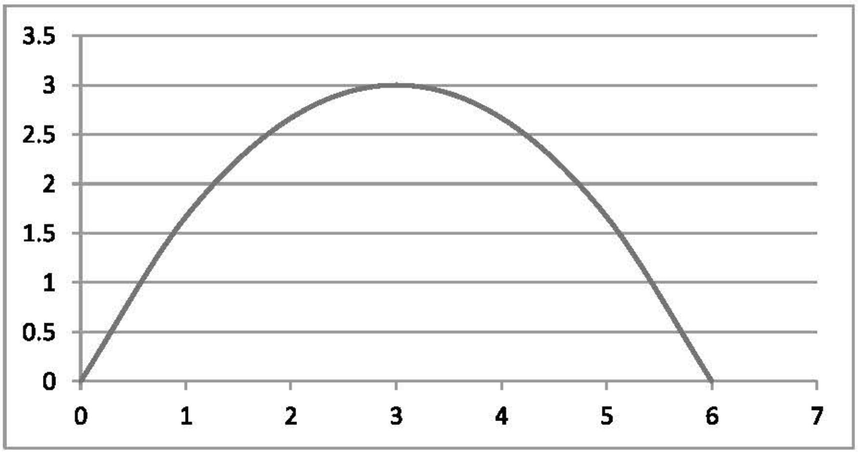


Figura 4.31

4.10. LISTADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

A. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN USANDO DERIVADAS.

1. Una partícula se mueve por sobre una línea recta a razón de $t^3 + 8t^2 + 5t$ pies en t segundos. Hallar su velocidad instantánea al finalizar 5 segundos.

2. Un objeto se mueve a lo largo de una recta de modo que su posición en el tiempo t es modelada por $P(t) = 2t^3 - 4t^2 + 2t + 3$. ¿Cuál es la posición inicial? ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración iniciales? ¿Cuáles son la velocidad y la aceleración en t=3 segundos?

3. La altura (en pies) en que se encuentra un objeto por encima del piso en el tiempo t (en segundos) es modelada por $S(t) = 192 + 160t - 16t^2$. Determinar las funciones de velocidad y aceleración. ¿Cuáles son la velocidad y aceleración iniciales del objeto? ¿Hasta qué altura llegará? ¿Cuándo choca contra el piso y qué tan rápido va?

B. LA REGLA DE L'HOPITAL.

1. Hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x)}{Cot(x)}$ b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x+4}{5x+7}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3Sen(\pi x) - Sen(3\pi x)}{x^3}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{5}{x^2-x-6}\right)$ e) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 e^{-3x}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{(1/x)}$

C. RAZONES DE CAMBIO RELACIONADAS.

1. Considera un depósito de agua en forma de un cono invertido. Cuando el depósito se descarga su volumen disminuye a razón de 50π metros cúbicos por minuto. Si la altura del cono es el triple del radio de su base. Hallar la rapidez con la cual varía el nivel del agua cuando está a 5 metros del fondo del depósito.

Respuesta: El nivel del agua disminuye a razón de 18 metros por minuto.

2. Considera un triángulo rectángulo de catetos a y b. Si el cateto a decrece a razón de 0,5 centímetros por minuto y el cateto b crece a razón de 2 centímetros por minuto, determine la variación del área del triángulo cuando a mide 16 centímetros y b, 12 centímetros.

Respuesta: El área del triángulo aumenta a una velocidad de 13 cm^2 por segundo.

3. Se vierte arena en el suelo a razón de 0,4 metros cúbicos por segundo. La arena forma en el suelo una pila con la forma de un cono cuya altura es igual al radio de la base. Hallar la velocidad con que aumenta la altura de la pila 10 segundos después de que se empezó a verter la arena.

Respuesta: La altura de la pila cónica aumenta a una velocidad de 0,0521 metros por segundo.

4. Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre los ejes coordenados en dirección positiva y su vértice, que es opuesto al origen, está sobre la curva de ecuación $y = 2^x$. En este último vértice la coordenada y aumenta a razón de una unidad por segundo. Hallar la variación del área del triángulo cuando $x = 2$ unidades.

Respuesta: El área del rectángulo aumenta a una velocidad de 3,443 unidades cuadradas por segundo.

5. El radio r y la altura h de un cilindro circular recto se relacionan con su volumen mediante la fórmula $V = \pi r^2 h$.

a) ¿Cómo se relaciona $\frac{dV}{dt}$ con $\frac{dh}{dt}$ si r es constante?

b) ¿Cómo se relaciona $\frac{dV}{dt}$ con $\frac{dr}{dt}$ si h es constante?

c) ¿Cómo se relaciona $\frac{dV}{dt}$ con $\frac{dr}{dt}$ y $\frac{dh}{dt}$ si ni r ni h son constantes?

d) En cierto instante la altura es de 6 centímetros y se incrementa en un centímetro por segundo, mientras que el radio es de 10 centímetros y disminuye a razón de un centímetro por segundo; ¿con qué rapidez cambia el volumen en ese instante? ¿El volumen aumenta o disminuye en ese instante?

6. En un muelle, una persona tira de un bote a razón de 15 metros por segundo, ayudándose de una soga amarrada al bote, la cual se encuentra al nivel del agua. Si las manos de la persona se hallan a 4,8 metros por encima del nivel del agua, hallar la rapidez con que el bote se aproxima al muelle cuando la cantidad de cuerda suelta es de 6 metros.

D. PRIMERA DERIVADA Y MONOTONÍA DE LAS FUNCIONES REALES.

1. Hallar el intervalo donde f es creciente; así también donde f es decreciente para las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3 - 2x - x^2$ b) $f(x) = -x^3 + 6x + 15x + 4$ c) $f(x) = x^4 + 8x^3 - 2$

d) $f(x) = -(x-1)^2$ d) $f(x) = 2x + 3x^2 - x^4$

2. Imaginemos que durante un año una función de utilidad se modela por $P(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, con $0 \leq t \leq 12$, donde t es el tiempo en meses. Determinar cuándo crecen y decrecen las utilidades. Trazar la gráfica de $P(t)$.

3. Un objeto se mueve en línea recta según el modelo $S(t) = 80t - 16t^2$, hallar el intervalo donde S es creciente y donde es creciente para $0 \leq t \leq 4$.

E. VALORES EXTREMOS DE LAS FUNCIONES REALES.

1. Hallar los puntos críticos, así como los máximos y mínimos locales de las funciones que se dan a continuación:

a) $f(x) = x^2 + 4x - 5$ b) $f(x) = x^3 + 3x$ c) $f(x) = x^4 - 2x^2$

2. Hallar los puntos críticos, asimismo los máximos y mínimos absolutos de las funciones que se dan a continuación:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$, con $-1 \leq x \leq 4$ b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 5$, con $0 \leq x \leq 5$

3. Una persona estima que su riqueza en el tiempo t (en años) con $0 \leq t \leq 30$, queda modelada por $S(t) = t^3 - 5t^2 - 3t + 100$. ¿Cuándo será máxima esa riqueza y cuándo mínima?

4. Supongamos que los astrónomos emplean la función $S(t) = t^3 - 48t + 200$, con $t \geq 0$, para modelar la distancia (en miles de millas) de un meteorito a la Tierra en el tiempo t en meses. Determinar el tiempo en el que dicho meteorito se encuentra más cercano a nuestro planeta y cuán cerca llega.

F. SEGUNDA DERIVADA Y CONCAVIDAD DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN REAL.

1. Hallar los posibles puntos de inflexión y determinar los intervalos y tipo de concavidad de la gráfica de las funciones que se dan:

a) $f(x) = -x^3$ b) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 10$ c) $f(x) = x^{2/3}$

G. BOSQUEJO DE CURVAS POLINOMIALES Y RACIONALES.

1. Usando derivadas, graficar la función f mostrando sus elementos más importantes.

a) $f(x) = x^2 - x - 6$ b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

2. Usando derivadas, graficar la función f, mostrando sus elementos más importantes.

a) $f(x) = \frac{3x-12}{x+2}$ b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

H. PROBLEMAS QUE INVOLUCRAN MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

1. Una caja con base y tapa cuadrada tiene un área superficial de 10 pies cuadrados. Determinar las dimensiones que maximizan el volumen de la caja.

2. Hallar las dimensiones de un techo rectangular que tenga un área de 196 pies cuadrados y perímetro mínimo.

3. Se tiene 120 pies de hojalata para usarlos en la construcción de la parte lateral de dos depósitos, uno circular y otro cuadrado. Determine las dimensiones de cada depósito para que el área total sea máxima.

4. La producción diaria de una mina de cobre que puede operar hasta 14 horas diarias es $56t - 0{,}09t^3$ toneladas pasadas t horas. ¿Cuántas horas diarias debe trabajar la mina para una producción máxima?

5. Un cono de papel para beber agua debe contener 10 centímetros cúbicos de líquido. Encontrar la altura y el radio del cono que requeriría la menor cantidad de papel.

6. ¿En qué lugar de la curva (punto) $y = \frac{1}{1+x^2}$ tiene la tangente con mayor valor de su pendiente?

I. DIFERENCIALES Y CÁLCULO DE ERRORES RELATIVOS Y ERRORES PORCENTUALES.

1. Al medir el radio de un tronco de madera, se obtiene 28 centímetros con un margen de error de 0,25 centímetros. Usando diferenciales, aproximar el máximo error posible cometido al calcular el área de la sección del tronco.

2. Tras calcular el radio de un círculo, se obtiene una medida aproximada de 15 pies, con un error probable de 0,002 pies. Al medir el área del círculo, determinar lo siguiente: El error absoluto, el error relativo, el error porcentual y el perímetro del círculo.

3. Al medir el radio de una esfera, se obtiene el valor aproximado de 7,5 centímetros, con un error probable del 0,25 % del valor obtenido. Mida el volumen de la esfera y determine lo siguiente: El error absoluto, el error relativo, el error porcentual y el área de superficie de la esfera.