Capítulo V

LA ANTIDERIVADA Y LA INTEGRAL INDEFINIDA

CAPÍTULO V

LA ANTIDERIVADA Y LA INTEGRAL INDEFINIDA

CONTENIDO

5.1 LA ANTIDERIVADA

INTRODUCCIÓN El ejercicio de hallar la derivada de una función $y = F(x)$ es llamado *proceso de derivación*, donde se obtiene la función derivada $y' = F'(x)$.

Mediante un proceso "inverso", a partir de la derivada se puede hallar la función original (o primitiva) $y = F(x)$; a esto se denomina *antiderivación*. No obstante, esta función se va a diferenciar de la original en un valor constante, como veremos en los ejemplos.

Ejemplo 1. La función $F(x) = x^4$ tiene por derivada a la función $F'(x) = 4x^3$.

Si a partir de $F'(x) = 4x^3$ se pretende hallar la función original o primitiva se obtendrá más de una, veamos:

$F(x) = x^4 + 3$ o $F(x) = x^4 - 5$, o ... $F(x) = x^4 + C$

Nota. Hallar la antiderivada o primitiva consiste en determinar la función original $y = F(x)$ de la cual proviene la derivada $y' = F'(x)$.

La constante C es un valor real y siempre se adiciona, puesto que en el proceso de derivación es anulada, si nos muestran la derivada de antemano no se sabe si la función original ha tenido o no una constante C. Esto hace que la antiderivada sea en realidad una familia de funciones, una para cada valor de la constante C.

En base a lo anterior es que se define la antiderivada de una función real.

DEFINICIÓN .- Si $y = F(x)$ es una función real, siendo $y' = F'(x)$ su derivada, entonces decimos que $y = F(x)$ es una antiderivada de $y' = F'(x)$.

ALGUNAS **FORMULAS** DE **ANTIDERIVACIÓN** .

Si $F'(x) = k$, entonces $F(x) = kx + C$.

Si $F'(x) = kx^n$, entonces $F(x) = \frac{k}{n+1}x^{n+1} + C, n \neq -1$

Si $F'(x) = k[G(x)]^n \cdot G'(x)$, entonces $F(x) = \frac{k}{n+1}[G(x)]^{n+1} + C$

Si $F'(x) = Sen(x)$, entonces $F(x) = -Cos(x) + C$

Si $F'(x) = Cos(x)$, entonces $F(x) = Sen\ (x) + C$

Si $F'(x) = kSen[G(x)].G'(x)$, entonces $F(x) = -kCos[G(x)] + C$

Si $F'(x) = kCos[G(x)].G'(x)$, entonces $F(x) = kSen[G(x)] + C$

Si $F'(x) = k[G(x)]'$, entonces $F(x) = kG(x) + C$

Si $F'(x) = kG'(x) + rH'(x)$, entonces $F(x) = kG(x) + rH(x) + C$

Nota. Con esto se pretende mostrar que el proceso de antiderivación se puede realizar mediante la ayuda de fórmulas; las cuales, por supuesto, se consigue demostrar recurriendo al formalismo matemático.

Ejemplo 2. Se muestra la antiderivada de las siguientes funciones:

1. $F'(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 6x + C$

2. $F'(x) = (6x-1)^2$.

Dando forma para aplicar la fórmula 2: $\quad F'(x) = \frac{1}{6}(6x-1)^2(6)$

Entonces, $F(x) = \frac{1}{6}\frac{1}{3}(6x-1)^3 + C \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{18}(6x-1)^3 + C$

3. Si $F'(x) = Sen(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = -Cos(x) + C$

4. Si $F'(x) = kCos[G(x)].G'(x) \quad \Rightarrow \quad F(x) = kSen[G(x)] + C$

5. Si $F'(x) = 2\sqrt[3]{t} \rightarrow F'(x) = 2t^{1/3} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \frac{2t^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{2}t^{4/3} + C$

5.2. LA INTEGRAL INDEFINIDA

DEFINICIÓN. La integral indefinida de una función real $y = f(x)$, que se denota por "$\int f(x)\,dx$" es la antiderivada de $y = f(x)$; es decir, si $y = F(x)$ es la antiderivada de $y = f(x)$ entonces siendo $C \in R$ (C una constante real), $\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x)$

5.3. TABLA BÁSICA DE INTEGRACIÓN

Enseguida se da un listado de fórmulas que permiten calcular, de forma inmediata, integrales de diversas funciones reales. Cada una de estas fórmulas puede ser comprobada haciendo uso de las reglas de derivación que se han estudiado.

OBSERVACIÓN. Las reglas que tienen variable x son de aplicación directa para resolver una integral indefinida; mientras que las reglas que tienen variable u que depende de x se consiguen a través de un cambio de variable o sustitución. C será siempre un número real, denominado constante de integración.

Por otro lado, cada integral indefinida será una familia de funciones reales $y = F(x) + C$, una por cada valor de la constante de integración C.

1. $F(x) = \int dx = x + C$

2. $F(x) = \int k \cdot dx = kx + C$

3. $F(x) = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

4. $F(x) = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$

5. $F(x) = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$

6. $F(x) = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \in R, n \neq -1$

7. $F(x) = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \in R, n \neq -1$, siendo u una función de x.

8. $F(x) = \int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$

9. $F(x) = \int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$

10. $F(x) = \int [f(x) - g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx - \int g(x)\, dx$

11. $F(x) = \int \frac{1}{x}\, dx = Ln\,|x| + C$

12. $F(x) = \int \frac{1}{u}\, du = Ln|u| + C$

13. $F(x) = \int e^x\, dx = e^x + C$

14. $F(x) = \int e^u\, du = e^u + C$

15. $F(x) = \int a^x\, dx = \frac{a^x}{Ln\, a} + C$

16. $F(x) = \int a^u\, du = \frac{a^u}{Ln\, a} + C$

17. $F(x) = \int Sen\, x\, dx = -Cos\, x + C$

18. $F(x) = \int Sen\, u\, du = -Cos\, u + C$

19. $F(x) = \int Cos\, x\, dx = Sen\, x + C$

20. $F(x) = \int Cos\, u\, du = Sen\, u + C$

21. $F(x) = \int Tan\, x\, dx = Ln(Sec\, x) + C$

22. $F(x) = \int Tan\, u\, du = Ln(Sec\, u) + C$

23. $F(x) = \int Cot\, x\, dx = Ln(Sen\, x) + C$

24. $F(x) = \int Cot\, u\, du = Ln(Sen\, u) + C$

25. $F(x) = \int Sec\, x\, dx = Ln(Sec\, x + Tan\, x) + C$

26. $F(x) = \int Sec\, u\, du = Ln(Sec\, u + Tan\, u) + C$

27. $F(x) = \int Csc\, x\, dx = Ln(Csc\, x - Cot\, x) + C$

28. $F(x) = \int Csc\, u\, du = Ln(Csc\, u - Cot\, u) + C$

29. $F(x) = \int Sec\, x\, Tan\, x\, dx = Sec\, x + C$

30. $F(x) = \int Sec\, u\, Tan\, u\, du = Sec\, u + C$

31. $F(x) = \int Csc\, x\, Cot\, x\, dx = -Csc\, x + C$

32. $F(x) = \int Csc\, u\, Cot\, u\, du = -Csc\, u + C$

33. $F(x) = \int Sen^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{Sen\, 2x}{4} + C$

34. $F(x) = \int Sen^2 u\, du = \frac{u}{2} - \frac{Sen\, 2u}{4} + C$

35. $F(x) = \int Cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{Sen\, 2x}{4} + C$

36. $F(x) = \int Cos^2 u\, du = \frac{u}{2} + \frac{Sen\, 2u}{4} + C$

37. $F(x) = \int Tan^2 x\, dx = Tan\, x - x + C$

38. $F(x) = \int Tan^2 u\, du = Tan\, u - u + C$

39. $F(x) = \int Cot^2 x\, dx = -Cot\, x + C$

40. $F(x) = \int Cot^2 u\, du = -Cot\, u + C$

41. $F(x) = \int Sec^2 x\, dx = Tan\, x + C$

42. $F(x) = \int Sec^2 u\, du = Tan\, u + C$

43. $F(x) = \int Csc^2 x\, dx = -Cot\, x + C$

44. $F(x) = \int Csc^2 u\, du = -Cot\, u + C$

45. $F(x) = \int \frac{1}{x^2+a^2}\, dx = \frac{1}{a} Tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

46. $F(x) = \int \frac{1}{u^2+a^2}\, du = \frac{1}{a} Tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

47. $F(x) = \int \frac{1}{x^2-a^2}\, dx = \frac{1}{2a} Ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + C$

48. $F(x) = \int \frac{1}{u^2-a^2}\, du = \frac{1}{2a} Ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right) + C$

49. $F(x) = \int \frac{1}{a^2-x^2}\, dx = \frac{1}{2a} Ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$ 50. $F(x) = \int \frac{1}{a^2-u^2}\, du = \frac{1}{2a} Ln\left(\frac{a+u}{a-u}\right) + C$

51. $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx = Ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$

52. $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{u^2+a^2}}\, du = Ln\left(u + \sqrt{u^2+a^2}\right) + C$

53. $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\, dx = Ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + C$

54. $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{u^2-a^2}}\, du = Ln\left(u + \sqrt{u^2-a^2}\right) + C$

55. $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = Sen^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

56. $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}\, du = Sen^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

57. $F(x) = \int \sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} Ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) + C$

58. $F(x) = \int \sqrt{u^2+a^2}du = \frac{u\sqrt{u^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} Ln\left(u + \sqrt{u^2+a^2}\right) + C$

59. $F(x) = \int \sqrt{x^2-a^2}dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} Ln\left(x + \sqrt{x^2-a^2}\right) + C$

60. $F(x) = \int \sqrt{u^2-a^2}du = \frac{u\sqrt{u^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2} Ln\left(u + \sqrt{u^2-a^2}\right) + C$

61. $F(x) = \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} Sen^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

62. $F(x) = \int \sqrt{a^2-u^2}du = \frac{u\sqrt{a^2-u^2}}{2} + \frac{a^2}{2} Sen^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$

63. $F(x) = \int \frac{1}{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} Ln\,|ax+b| + C$

64. $F(x) = \int x\, Sen\, ax\, dx = \frac{Sen\, ax}{a^2} - \frac{x\, Cos\, ax}{a} + C$

65. $F(x) = \int x\, Cos\, ax\, dx = \frac{Cos\, ax}{a^2} + \frac{x\, Sen\, ax}{a} + C$

66. $F(x) = \int e^{ax}\, Sen\, bx\, dx = \frac{e^{ax}[a\, Sen\, bx - b\, Cos\, bx]}{a^2+b^2} + C$

67. $F(x) = \int e^{ax}\, Cos\, bx\, dx = \frac{e^{ax}[a\, Cos\, bx + b\, Sen\, bx]}{a^2+b^2} + C$

68. $F(x) = \int Sen^m ax\, Cos\, ax\, dx = \frac{Sen^{m+1} ax}{(m+1)a} + C, m \neq -1$

69. $F(x) = \int Cos^m ax\, Sen\, ax\, dx = -\frac{Cos^{m+1} ax}{(m+1)a} + C, m \neq -1$

70. $F(x) = \int Sen\, ax\, Cos\, ax\, dx = \frac{Sen^2 ax}{2a} + C$

71. $F(x) = \int Sen\ ax\ Cos\ bx\ dx = -\frac{Cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{Cos(a+b)x}{2(p+q)} + C$

71. $F(x) = \int Sen^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\ Sen^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2} + C$

72. $F(x) = \int Cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\ Cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2} + C$

73. $F(x) = \int Tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\ Tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{2}Ln(x^2 + a^2) + C$

74. $F(x) = \int Cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\ Cot^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{a}{2}Ln(x^2 + a^2) + C$

75. $F(x) = \int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$

76. $F(x) = \int xe^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + C$

77. $F(x) = \int x^2e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) + C$

78. $F(x) = \int Ln\ x\ dx = x\ Ln\ x - x + C$

79. $F(x) = \int x\ Ln\ x\ dx = \frac{x^2}{2}\left(Ln\ x - \frac{1}{2}\right) + C$

80. $F(x) = \int x^m\ Ln\ x\ dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(Ln\ x - \frac{1}{m+1}\right) + C, m \neq -1$

81. $F(x) = \int \frac{Ln\ x}{x}\ dx = \frac{1}{2}Ln^2x + C$

82. $F(x) = \int \frac{Ln\ x}{x^2}\ dx = -\frac{Ln\ x}{x} - \frac{1}{x} + C$

83. $F(x) = \int Sec\ x\ Tan\ x\ dx = Sec\ x + C$

84. $F(x) = \int Ln^2x\ dx = x\ Ln^2x - 2x\ Ln\ x + 2x + C$

85. $F(x) = \int Sen^2(ax)\ dx = \frac{x}{2} - \frac{Sen\ (2ax)}{4a} + C$

86. $F(x) = \int Cos^2(ax)\ dx = \frac{x}{2} - \frac{Sen\ (2ax)}{4a} + C$

87. $F(x) = \int Tan^2(ax)\ dx = \frac{Tan(ax)}{a} - x + C$

88. $F(x) = \int Cot^2(ax)\ dx = -\frac{Cot\ (ax)}{a} - x + C$

89. $F(x) = \int Sec^2(ax)\ dx = \frac{Tan(ax)}{a} + C$

90. $F(x) = \int Csc^2(ax)\ dx = -\frac{Cot(ax)}{a} + C$

OBSERVACIÓN. Los ejemplos que se exponen a continuación obedecen a métodos de solución que tienen la intención de acercarlos a la tabla básica de integrales; pueden clasificarse, entre otros, del modo siguiente:

a) Integración por tabla directa.

b) Cambio de variable simple para dar forma a integrales de tabla.

c) Método de artificios: Desarrollo, simplificación, sumar y restar, otros artificios algebraicos.

d) Método de sustitución o cambio de variable.

e) Completar cuadrados en el denominador.

f) Método de integración por partes.

g) Sustitución trigonométrica

h) Integración por fracciones parciales.

INTEGRACIÓN POR TABLAS BÁSICA DE INTEGRALES

En la solución de las integrales, aparecen algunos pasos adicionales para un mejor entendimiento de los lectores, sobre todo de los estudiantes.

Ejemplo 1. Se muestra integrales resueltas *usando la tabla básica.*

a) $F(x) = \int (x^2 + x - 1)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + C$

b) $F(x) = \int (4x^3 - 2x + 6)dx = \frac{4x^4}{4} - \frac{2x^2}{2} + 6x + C = x^4 - x^2 + 6x + C$

c) $F(x) = \int (2x^{-3} - x^{-2})dx = \frac{2x^{-2}}{-2} - \frac{x^{-1}}{-1} + C = -x^{-2} + x^{-1} + C = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} + C$

d) $F(x) = \int \left(\frac{1}{x} - e^x\right) dx = Ln\,|x| - e^x + C$

e) $F(x) = \int (3x^2 - Cos\,x)dx = \frac{3x^3}{3} - Sen\,x + C = x^3 - Sen\,x + C$

f) $F(x) = \int (x^{-2} - x^{-1})dx = \int \left(x^{-2} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^{-1}}{-1} - Ln\,|x| + C = -\frac{1}{x} - Ln\,|x| + C$

g) $F(x) = \int \left(x^{1/2} + x^{-1/2}\right)dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + C$

h) $F(x) = \int xe^x dx = e^x(x - 1) + C$

i) $F(x) = \int x^2 e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}\right) + C$

j) $F(x)=\int(Cos^2x-2^x)dx=\frac{x}{2}+\frac{Sen(2x)}{4}-\frac{2}{\ln 2}+C$

k) $F(x)=\int(Tan\,x-Sec\,x\tan x)dx=Ln\,|Sec\,x|-Sec\,x+C$

l) $F(x)=\int x\,Sen(3x)dx=\frac{Sen(3x)}{9}-\frac{x\,Cos(3x)}{3}+C$

m) $F(x)=\int\frac{1}{3x-5}dx=\frac{1}{3}Ln|3x-5|+C$

n) $F(x)=\int\frac{1}{x^2-9}dx=\int\frac{1}{x^2-3^2}dx=\frac{1}{2(3)}Ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C=\frac{1}{6}Ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$

o) $F(x)=\int\frac{1}{16-x^2}dx=\int\frac{1}{4^2-x^2}dx=\frac{1}{2(4)}Ln\left|\frac{4+x}{4-x}\right|+C=\frac{1}{8}Ln\left|\frac{4+x}{4-x}\right|+C$

p) $F(x)=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+25}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{x^2+5^2}}dx=Ln\left|x+\sqrt{x^2+5^2}\right|+C$

q) $F(x)=\int\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{5^2-x^2}}dx=Sen^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)+C$

r) $F(x)=\int\left(\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^2}-5x\right)dx=\int(2x^{-3}+3x^{-2}-5x)dx=\frac{2x^{-2}}{-2}+\frac{3x^{-1}}{-1}-\frac{5x^2}{2}+C$

Luego, $F(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}-\frac{5}{2}x^2+C.$

s) $F(x)=\int\left(\sqrt{2x}+\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx=\sqrt{2}\int x^{1/2}dx-\frac{1}{\sqrt{2}}\int x^{-1/2}dx=\sqrt{2}\,\frac{2}{3}x^{3/2}-\frac{1}{\sqrt{2}}(2)x^{\frac{1}{2}}+C$

Luego, $F(x)=\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}-\sqrt{2}x^{1/2}+C.$

t) $F(x)=\int\frac{2+Ln\,x}{x}dx=2\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{Ln\,x}{x}dx=2\,Ln\,x+\frac{1}{2}Ln^2x+C$

u) $F(x)=\int(e^{5x}+2^{5x})dx=\frac{1}{5}e^{5x}+\frac{2^{5x}}{Ln\,2}+C$

v) $F(x)=\int 3^xe^xdx=\int(3e)^xdx=\frac{(3e)^{5x}}{Ln(3e)}+C$

w) $F(x)=\int Sen^2x\,dx=\frac{x}{2}-\frac{Sen(2x)}{4}+C$

5.4. INTEGRACIÓN POR CAMBIO SIMPLE DE VARIABLE. SUSTITUCIÓN SIMPLE

Consiste en hacer un cambio de variable simple con la intención de transformar la integral dada en otra integral equivalente que se encuentre en la tabla básica de integrales, luego de integrar se regresa a la variable original devolviendo el cambio de variable. Aquí se usa la nueva variable, generalmente u y su diferencial du. Puede emplearse otras variables.

Ejemplo 1. Se presenta integrales resueltas *usando cambio de variable simple para dar forma a integral de la tabla básica.*

Nota: Observe cuidadosamente los arreglos que se hacen en cada ejercicio.

a) $F(x) = \int x\,Sen(x^2)dx = \int Sen(x^2)(x\,dx)$. CV: $u = x^2 \to du = 2x\,dx \to x\,dx = \frac{du}{2}$

$\Rightarrow F = \int Sen(x^2)\,x\,dx = \int Sen\,u\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int Sen\,u\,du = \frac{1}{2}(-Cos\,u) + C = -\frac{1}{2}Cos\,u + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = -\frac{1}{2}Cos(x^2) + C$

b) $F(x) = \int Cos(4x+9)\,dx$. VC: $u = 4x+9 \to du = 4\,dx \to dx = \frac{du}{4}$

$\Rightarrow F = \int Cos(4x+9)\,dx = \int Cos(u)\,\frac{du}{4} = \frac{1}{4}\int Cos(u)du = \frac{1}{4}Sen(u) + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{1}{4}Sen(4x+9) + C$

c) $F(x) = \int xe^{x^2-3}dx = \int e^{x^2-3}\,(x\,dx)$ CV: $u = x^2 - 3 \to du = 2x\,dx \to x\,dx = \frac{du}{2}$

$\Rightarrow F = \int e^{x^2-3}\,x\,dx = \int e^u\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-3} + C$

d) $F(x) = \int 2x(x^2+4)^4dx = \int(x^2+4)^4\,(2x\,dx)$ CV: $u = x^2+4 \to du = 2x\,dx$

$\Rightarrow F = \int(x^2+4)^4\,(2x\,dx) = \int u^4du = \frac{u^5}{5} + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{(x^2+4)^5}{5} + C$

e) $F(x) = \int\frac{x}{4-x^2}dx = \int\frac{1}{4-x^2}x\,dx$ CV: $u = 4 - x^2 \to du = -2x\,dx \to x\,dx = -\frac{du}{2}$

$\Rightarrow F = \int\frac{1}{4-x^2}\,x\,dx = \int\frac{1}{u}\left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du = -\frac{1}{2}Ln\,|u| + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = -\frac{1}{2}Ln|4-x^2| + C$

f) $F(x) = \int\frac{x+1}{x^2+2x+3}dx = \int\frac{1}{x^2+2x+3}(x+1)dx$

CV: $u = x^2 + 2x + 3 \to du = (2x + 2)dx \to (x + 1)dx = \frac{du}{2}$

$\Rightarrow F = \int \frac{1}{x^2+2x+3}(x + 1)dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}Ln\,|u| + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{1}{2}Ln|x^2 + 2x + 3| + C$

g) $F(x) = \int 5x\sqrt[3]{(9 - 4x^2)^2}dx = 5\int (9 - 4x^2)^{2/3}\, xdx$

CV: $u = 9 - 4x^2 \to du = -8x\, dx \to x\, dx = -\frac{du}{8}$

$\Rightarrow F = 5\int (9 - 4x^2)^{2/3}\, xdx = 5\int u^{2/3}\left(-\frac{du}{8}\right) = -\frac{5}{8}\int u^{2/3}\, du = -\frac{5}{8}\frac{3}{5}u^{5/3} + C = -\frac{3}{8}u^{5/3} + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = -\frac{3}{8}(9 - 4x^2)^{5/3} + C$

i) $F(x) = \int 2x(x^2 + 2)^3dx = \int (x^2 + 2)^3(2x\, dx)$ CV: $u = x^2 + 2 \to du = 2x\, dx$

$\Rightarrow F = \int (x^2 + 2)^3(2x\, dx) = \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{(x^2+2)^4}{4} + C$

j) $F(x) = \int \sqrt{x^2 + 2x}(x + 1)dx$

CV: $u = x^2 + 2x \to du = (2x + 2)\, dx \to du = 2(x + 1)\, dx \to (x + 1)dx = \frac{du}{2}$

$\Rightarrow F = \int \sqrt{x^2 + 2x}(x + 1)dx = \int \sqrt{u}\left(\frac{du}{2}\right) = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}u^{3/2} + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x)^{3/2} + C$

k) $F(x) = \int \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}\frac{dx}{x^2}$

CV: $u = 1 + \frac{1}{2x} \to u = 1 + \frac{1}{2}x^{-1} \to du = \frac{1}{2}(-x^{-2}dx) \to \frac{dx}{x^2} = -2du$

$\Rightarrow F = \int \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}\frac{dx}{x^2} = \int \sqrt{u}(-2du) = -2\int u^{1/2}du = -2\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = -\frac{4}{3}u^{3/2} + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = -\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3/2} + C$

l) $F(x) = \int \frac{x}{a+bx^2}dx = \int \frac{1}{a+bx^2}x\,dx$ CV: $u = a + bx^2 \rightarrow du = 2bx\,dx \rightarrow x\,dx = \frac{du}{2b}$

$\Rightarrow F = \int \frac{1}{a+bx^2}x\,dx = \int \frac{1}{u}\frac{du}{2b} = \frac{1}{2b}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2b}Ln\,u + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{1}{2b}Ln(a+bx^2) + C$

m) $F(x) = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{1}{(e^x)^2+1^2}e^x dx$ CV: $u = e^x \rightarrow du = e^x dx$

$\Rightarrow F = \int \frac{1}{(e^x)^2+1^2}e^x dx = \int \frac{1}{u^2+1^2}du = Arctan(u) + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = Arctan(e^x) + C$

n) $F(x) = \int \frac{1}{4+9x^2}dx = \int \frac{1}{2^2+(3x)^2}dx$ CV: $u = 3x \rightarrow du = 3\,dx$

$\Rightarrow F = \int \frac{1}{2^2+(3x)^2}dx = \int \frac{1}{2^2+u^2}du = \frac{1}{2}Arctan\left(\frac{u}{2}\right) + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{1}{2}\,Arctan\left(\frac{3x}{2}\right) + C$

o) $F(x) = \int \frac{7x^2}{5-x^6}dx = 7\int \frac{1}{\sqrt{5}^2-(x^3)^2}x^2dx$ CV: $u = x^3 \rightarrow du = 3x^2dx \rightarrow x^2dx = \frac{du}{3}$

$\Rightarrow F = 7\int \frac{1}{\sqrt{5}^2-(x^3)^2}x^2dx = 7\int \frac{1}{\sqrt{5}^2-u^2}\frac{du}{3} = \frac{7}{3}\int \frac{1}{\sqrt{5}^2-u^2}du = \frac{7}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}Ln\left(\frac{\sqrt{5}+u}{\sqrt{5}-u}\right) + C$

Volviendo a variable x: $F(x) = \frac{7}{6\sqrt{5}}\,Ln\left(\frac{\sqrt{5}+x^3}{\sqrt{5}-x^3}\right) + C$

5.5. INTEGRACIÓN POR ARTIFICIOS: DESARROLLO, SIMPLIFICACIÓN, SUMAR Y RESTAR

ARTIFICIOS DE DESARROLLO. Este proceso consiste en desarrollar la integral dada para transformarla en otra equivalente que se encuentre en la tabla básica de integrales. Se usa propiedades algebraicas.

Nota: Observe cuidadosamente los arreglos que se hacen en cada ejercicio.

Ejemplo 1. Se da a conocer integrales resueltas *usando método de artificios: Desarrollo.*

a) $F(x) = \int (x-3)^2 dx = \int (x^2 - 6x + 9)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 9x + C$

Luego, $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + C$

b) $F(x) = \int (4+2x)^3 dx = \int [64 + 3(16)(2x) + 3(4)(4x^2) + 8x^3]dx$

$= \int (64 + 96x + 48x^2 + 8x^3)dx = 64x + \frac{96x^2}{2} + \frac{48x^3}{3} + \frac{8x^4}{4} + C$

Luego, $F(x) = 64x + 48x^2 + 16x^3 + 2x^4 + C$

c) $F(x) = \int (x-2)(2x+1)dx = \int (2x^2 - 3x - 2)dx$

Luego, $F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 2x + C$

d) $F(x) = \int (x^{1,5} + 2x^{0,5})^2 dx = \int (x^3 + 4x^2 + 4x)dx = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + C$

Luego, $F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + 2x^2 + C$

e) $F(x) = \int \left(x + \sqrt{x} - 1\right)^2 dx = \int [x^2 + x + 1 + 2x\sqrt{x} - 2(x)(1) - 2\sqrt{x}(1)]dx$

$= \int [x^2 - x + 1 + 2x^{3/2} - 2x^{1/2}]dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{2x^{5/2}}{5/2} - \frac{2x^{3/2}}{3/2} + C$

Luego, $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \frac{4x^{5/2}}{5} - \frac{4x^{3/2}}{3} + C$

f) $F(x) = \int (e^x - x)^2 dx = \int (e^{2x} - 2xe^x + x^2)dx = \frac{1}{2}e^{2x} - 2\left[\frac{e^{2x}}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{x^3}{3} + C$

$= \frac{1}{2}e^{2x} - xe^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{x^3}{3} + C$

Luego, $F(x) = e^{2x} - xe^{2x} + \frac{x^3}{3} + C$

ARTIFICIOS DE **SIMPLIFICACIÓN**. Se centra en simplificar la integral dada para transformarla en otra equivalente que se encuentre en la tabla básica de integrales. Generalmente se factoriza, se simplifica y se integra.

Nota: Observe cuidadosamente los arreglos que se hacen en cada ejercicio.

Ejemplo 2. Aparecen integrales resueltas *usando método de artificios*: *Simplificación*.

a) $F(x) = \int \frac{x^3-2x^2+2}{x^2}dx = \int (x - 2 + 2x^{-2})dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{2x^{-1}}{-1} + C$

Luego, $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + C$

b) $F(x) = \int \frac{x^2+2x-4}{\sqrt{x}}dx = \int (x^{1,5} + 2x^{0,5} - 4x^{-0,5})dx = \frac{x^{2,5}}{2,5} + \frac{2x^{1,5}}{1,5} - \frac{4x^{0,5}}{0,5} + C$

Luego, $F(x) = \frac{2x^{2,5}}{5} + \frac{4x^{1,5}}{3} - 8x^{0,5} + C$

c) $F(x) = \int \frac{x^2-4}{x-2}dx = \int \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}dx = \int (x+2)dx = \frac{x^2}{2} + 2x + C$

Luego, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x + C$

d) $F(x) = \int \frac{2x+3}{4x^2-9}dx = \int \frac{2x+3}{(2x+3)(2x-3)}dx = \int \frac{1}{2x-3}dx = \frac{1}{2}Ln|2x-3| + C$

Luego, $F(x) = \frac{1}{2}Ln|2x-3| + C$

e) $F(x) = \int \frac{x^3+27}{x+3}dx = \int \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3}dx = \int (x^2 - 3x + 9)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x + C$

Luego, $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 9x + C$

f) $F(x) = \int \frac{x-3}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{x-3}{(x-2)(x-3)}dx = \int \frac{1}{x-2}dx = Ln|x-2| - C$

Luego, $F(x) = Ln|x-2| - C$

g) $F(x)=\int\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}dx=\int\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}dx=\int(x^{0,5}+2)dx=\frac{x^{1,5}}{1,5}+2x+C$

Luego, $F(x)=\frac{2x^{1,5}}{3}+2x+C$

h) $F(x)=\int\frac{x^2+4x+16}{x^3-64}dx=\int\frac{x^2+4x+16}{(x-4)(x^2+4x+16)}dx=\int\frac{1}{x-4}dx=Ln|x-4|+C$

Luego, $F(x)=Ln|x-4|+C$

i) $F(x)=\int\frac{x-1}{x^2-5x+4}dx=\int\frac{x-1}{(x-1)(x-4)}dx=\int\frac{1}{x-4}dx=Ln|x-4|+C$

Luego, $F(x)=Ln|x-4|+C$

ARTIFICIOS DE SUMAR Y RESTAR. Estos procesos consisten —como su nombre indica— en sumar y restar un número o una expresión algebraica, apropiadamente, en la integral dada, con el objetivo de transformarla en otra equivalente que se encuentre en la tabla básica de integrales.

Nota: Observe cuidadosamente los arreglos que se hacen en cada ejercicio.

Ejemplo 3. Se da integrales resueltas *usando método de artificios*: *Sumar y restar*.

a) $F(x)=\int\frac{x}{x+5}dx=\int\frac{x+5-5}{x+5}dx=\int\left(\frac{x+5}{x+5}-\frac{5}{x+5}\right)dx=\int\left(1-\frac{5}{x+5}\right)dx=x-5Ln|x+5|+C$

Luego, $F(x)=x-5Ln|x+5|+C$

b) $F(x)=\int\frac{2x}{x-3}dx=2\int\frac{x-3+3}{x-3}dx=2\int\left(\frac{x-3}{x-3}+\frac{3}{x-3}\right)dx=2\int\left(1+\frac{3}{x-3}\right)dx$

$=2[x+3Ln|x-3|]+C$

Luego, $F(x)=2[x+3Ln|x-3|]+C$

c) $F(x)=\int\frac{x}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1+1}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{2x-1}{2x-1}+\frac{1}{2x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}Ln|2x-1|\right]+C$

Luego, $F(x)=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2}Ln|2x-1|\right]+C$

d) $F(x)=\int\frac{x+2}{x+6}dx=\int\frac{x+2+4-4}{x+6}dx=\int\frac{x+6-4}{x+6}dx=\int\left(\frac{x+6}{x+6}-\frac{4}{x+6}\right)dx=\int\left(1-\frac{4}{x+6}\right)dx$

$=x-4Ln|x+6|+C$

Luego, $F(x)=x-4Ln|x+6|+C$

e) $F(x)=\int\frac{1}{x(x+1)}dx=\int\frac{x+1-x}{x(x+1)}dx=\int\left(\frac{x+1}{x(x+1)}-\frac{x}{x(x+1)}\right)dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=Ln\,|x|-Ln|x+1|+C$

Luego, $F(x)=Ln\,|x|-Ln|x+1|+C$

f) $F(x)=\int\frac{x+1}{x-3}dx=\int\frac{x+1-4+4}{x-3}dx=\int\frac{x-3+4}{x-3}dx=\int\left(\frac{x-3}{x-3}+\frac{4}{x-3}\right)dx=\int\left(1+\frac{4}{x-3}\right)dx$

$=x+4Ln|x-3|+C$

Luego, $F(x)=x+4Ln|x-3|+C$

g) $F(x)=\int\frac{x+4}{2x+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+8}{2x+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+3+5}{2x+3}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{2x+3}{2x+3}+\frac{5}{2x+3}\right)dx=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{5}{2x+3}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\int dx+\frac{5}{2}\int\frac{1}{2x+3}dx=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\frac{1}{2}Ln|2x+3|+C=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}Ln|2x+3|+C$

Luego, $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}Ln|2x+3|+C$

h) $F(x)=\int\frac{x^2}{x^2+9}dx=\int\frac{x^2+9-9}{x^2+9}dx=\int\left(\frac{x^2+9}{x^2+9}-\frac{9}{x^2+9}\right)dx=\int\left(1-\frac{9}{x^2+9}\right)dx=\int dx-9\int\frac{1}{x^2+3^2}dx$

$=x-9\frac{1}{3}ArcTan\left(\frac{x}{3}\right)+C$

Luego, $F(x)=x-3\,ArcTan\left(\frac{x}{3}\right)+C.$

5.6. INTEGRACIÓN POR MÉTODO DE SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE

Se trata de hacer un cambio de variable para transformar la integral dada en otra integral equivalente que se encuentre en la tabla básica de integrales, luego de integrar se regresa a la variable original devolviendo el cambio de variable. Aquí se usa una nueva variable, generalmente u y su diferencial du.

El cambio de variable se realiza en cada factor que aparece en el integrando. Puede ser necesaria la combinación con otros métodos de integración.

Nota: Observe cuidadosamente los arreglos que se hacen en cada ejercicio.

Ejemplo 1. Se presenta integrales resueltas *usando método de Cambio de variable.*

a) $F(x) = \int x\sqrt{x+3}\,dx$ CV: $u = \sqrt{x+3} \to u^2 = x+3 \to x = u^2-3 \to dx = 2u\,du$

Reemplazando en $F = \int (u^2-3)u(2u\,du) = 2\int (u^4-3u^2)\,du = 2\left(\frac{u^5}{5} - \frac{3u^3}{3}\right) + C$

$= \frac{2u^5}{5} - 2u^2 + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{2\sqrt{x+3}^5}{5} - 2\sqrt{x+3}^3 + C$

b) $F(x) = \int \frac{\sqrt{x-4}}{x}\,dx$ CV: $u = \sqrt{x-4} \to u^2 = x-4 \to x = u^2+4 \to dx = 2u\,du$

Reemplazando en $F = \int \frac{u}{u^2+4}(2u\,du) = 2\int \frac{u^2}{u^2+4}du = 2\int \frac{u^2+4-4}{u^2+4}du = 2\int \left(\frac{u^2+4}{u^2+4} - \frac{4}{u^2+4}\right)du$

$= 2\int \left(1 - \frac{4}{u^2+4}\right)du = 2\int du - 8\int \frac{1}{u^2+2^2}du = 2u + 8\frac{1}{2}Arctan\left(\frac{u}{2}\right) + C = 2u + 4\,ArcTan\left(\frac{u}{2}\right) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = 2\sqrt{x-4} + 4ArcTan\left(\frac{\sqrt{x-4}}{2}\right) + C$

c) $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x-5}}\,dx$ CV: $u = \sqrt{x-5} \to u^2 = x-5 \to x = u^2+5 \to dx = 2u\,du$

Reemplazando en $F = \int \frac{u^2+5}{u}(2u\,du) = 2\int (u^2+5)du = 2\left(\frac{u^3}{3} + 5u\right) + C = \frac{2u^3}{3} + 10u + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x-5}^3 + 10\sqrt{x-5} + C$

d) $F(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{x-2}}\,dx$ CV: $u = \sqrt{x-2} \to u^2 = x-2 \to x = u^2+2 \to dx = 2u\,du$

Reemplazando en $F = \int \frac{(u^2+2)^2}{u}(2u\,du) = 2\int (u^4+4u^2+4)du = 2\left(\frac{u^5}{5}+\frac{4u^3}{3}+4u\right)+C$

$= \frac{2}{5}u^5 + \frac{8}{3}u^3 + 8u + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{2}{5}\sqrt{x-2}^5 + \frac{8}{3}\sqrt{x-2}^3 + 8\sqrt{x-2} + C$

e) $F(x) = \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ CV: $u = \sqrt[3]{x} \to u^3 = x \to x = u^3 \to dx = 3u^2du$

Reemplazando en $F = \int \frac{u^3+1}{u}(3u^2du) = 3\int (u^4+u)du) = 3\left(\frac{u^5}{5}+\frac{u^2}{2}\right)+C$

$=\frac{3}{5}u^5 + \frac{3}{2}u^2 + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x}^5 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x}^2 + C$

f) $F(x) = \int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ CV: $u = \sqrt[3]{x} \to u^3 = x \to x = u^3 \to dx = 3u^2du$ y $\sqrt{x} = u^{3/2}$

Reemplazando en $F = \int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1+u^{3/2}}{u}\,(3u^2du) = 3\int (u+u^{5/2})du = 3\left(\frac{u^2}{2}+\frac{u^{7/2}}{7/2}\right)+C$

$= \frac{3}{2}u^2 + \frac{6}{7}u^{7/2} + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x}^2 + \frac{6}{7}\sqrt[3]{x}^{7/2} + C$

g) $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx$ CV: $u = \sqrt[3]{2x+1} \to u^3 = 2x+1 \to x = \frac{u^3-1}{2} \to dx = \frac{3}{2}u^2du$

Reemplazando en $F = \int \frac{x}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx = \int \frac{u^3-1}{2\,u}\,\frac{3}{2}u^2du = \frac{3}{4}\int (u^4-u)du = \frac{3}{4}\left(\frac{u^5}{5}-\frac{u^2}{2}\right)+C$

$= \frac{3}{20}u^5 - \frac{3}{8}u^2 + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{2x+1}^5 - \frac{3}{8}\sqrt[3]{2x+1}^2 + C$

h) $F(x) = \int \sqrt{1+x}\,x^2dx$ CV: $u = 1+x \to x = u-1 \to dx = du$

Reemplazando en $F=\int \sqrt{u}(u-1)^2\,du=\int u^{0,5}(u^2-2u+1)du$

$=3\int(u^{2,5}-2u^{1,5}+u^{0,5})du=\frac{u^{3,5}}{3,5}-2\frac{u^{2,5}}{2,5}+\frac{u^{1,5}}{1,5}+C=\frac{2}{7}u^{3,5}-\frac{4}{5}u^{2,5}+\frac{2}{3}u^{1,5}+C$

Volviendo a variable original: $F(x)=\frac{2}{7}\sqrt{1+x}^{3,5}-\frac{4}{5}\sqrt{1+x}^{2,5}+\frac{2}{3}\sqrt{1+x}^{1,5}+C$

i) $F(x)=\int\frac{Arcsen^2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ CV: $u=Arcsen\,x\rightarrow x=Sen\,u\rightarrow\ dx=Cos\,u\,du$

Reemplazando en $F=\int\frac{u^2}{\sqrt{1-Sen^2u}}Cos\,u\,du=\int\frac{u^2}{\sqrt{Cos^2u}}Cos\,u\,du=\int\frac{u^2}{Cos\,u}Cos\,u\,du$

$=\int u^2du=\frac{u^3}{3}+C\ =\frac{1}{3}u^3+C$

Volviendo a variable original $F(x)=\frac{1}{3}Arcsen^3x+C$

Ejercicios. Calcular las siguientes integrales:

a) $F(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x+3}}\,dx$ b) $F(x)=\int x\sqrt{x-1}\,dx$

c) $F(x)=\int\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$ d) $F(x)=\int\frac{Cos\,x}{\sqrt{1+Sen^2x}}\,dx$

e) $F(x)=\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$ f) $F(x)=\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}\,dx; x=\frac{1}{t}$

5.7. MÉTODO DE COMPLETAR CUADRADOS EN EL DENOMINADOR

Este método centra su interés en completar cuadrados en el denominador del integrando con la finalidad de transformar la integral dada en otra integral equivalente que se encuentre en la tabla básica de integrales, en las que aparecen los términos u^2 y a^2; luego de integrar se regresa a la variable original devolviendo el cambio de variable. También se usa la nueva variable u, su diferencial du y una constante a. Este método se combina con cambio de variable simple.

Nota: Observe cuidadosamente los arreglos que se hacen en cada ejercicio.

Ejemplo 1. Se muestra integrales resueltas *usando método Completar cuadrados en el denominador*.

a) $F(x)=\int\frac{1}{x^2+4x+5}dx=\int\frac{1}{(x+2)^2+1}dx=\int\frac{1}{(x+2)^2+1^2}dx$ CV: $u=x+2\ \rightarrow du=dx$

Luego, $F = \int \frac{1}{(x+2)^2+1^2} dx = \int \frac{1}{u^2+1^2} du = Arctan(u) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = Arctan(x+2) + C$

b) $F(x) = \int \frac{1}{x^2-6x+5} dx = \int \frac{1}{x^2-6x+9-4} dx = \int \frac{1}{(x-3)^2-2^2} dx$ CV: $u = x-3 \to du = dx$

Luego, $F = \int \frac{1}{(x-3)^2-2^2} dx = \int \frac{1}{u^2-2^2} du = \frac{1}{2(2)} Ln\left(\frac{u-2}{u+2}\right) + C = \frac{1}{4} Ln\left(\frac{u-2}{u+2}\right) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{1}{4} Ln\left(\frac{x-3-2}{x-3+2}\right) + C = \frac{1}{4} Ln\left(\frac{x-5}{x-1}\right) + C$

c) $F(x) = \int \frac{1}{4x^2+4x+10} dx = \int \frac{1}{4x^2+4x+1+9} dx = \int \frac{1}{(2x+1)^2+3^2} dx$

CV: $u = 2x+1 \to du = 2dx \to dx = \frac{du}{2}$

Luego, $F = \int \frac{1}{(2x+1)^2+3^2} dx = \int \frac{1}{u^2+3^2} \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2+3^2} du = \frac{1}{2}\frac{1}{3} Arctan\left(\frac{u}{3}\right) + C = \frac{1}{6} Arctan\left(\frac{u}{3}\right) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = \frac{1}{6} Arctan\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C$

d) $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-8x+25}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-8x+16+9}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2+3^2}} dx$ CV: $u = x-4 \to du = dx$

Luego, $F = \int \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2+3^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{u^2+3^2}} du = Ln\left(u + \sqrt{u^2+3^2}\right) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = Ln\left(x-4+\sqrt{x^2-8x+25}\right) + C$

e) $F(x) = \int \frac{1}{2x-x^2-10} dx = -\int \frac{1}{x^2-2x+1+9} dx = -\int \frac{1}{(x-1)^2+3^2} dx$ CV: $u = x-1 \to du = dx$

Luego, $F = -\int \frac{1}{(x-1)^2+3^2} dx = -\int \frac{1}{u^2+3^2} du = -\frac{1}{3} Arctan\left(\frac{u}{3}\right) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = -\frac{1}{3} Arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$

f) $F(x) = \int \frac{1}{3+4x-4x^2} dx = \int \frac{1}{4-1+4x-4x^2} dx = \int \frac{1}{2^2-(1-2x)^2} dx$

CV: $u = 1-2x \to du = -2dx \to dx = -\frac{du}{2}$

Luego, $F = \int \frac{1}{2^2-(1-2x)^2} dx = \int \frac{1}{2^2-u^2}\left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{2^2-u^2} du = -\frac{1}{2}\frac{1}{2(2)} Ln\left(\frac{2+u}{2-u}\right) + C$

$= -\frac{1}{8} Ln\left(\frac{2+u}{2-u}\right) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = -\frac{1}{8} Ln\left(\frac{2+1-2x}{2-1+2x}\right) + C = -\frac{1}{8} Ln\left(\frac{3-2x}{1+2x}\right) + C$

g) $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-1+4x-4x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-(1-2x)^2}} dx$

CV: $u = 1-2x \rightarrow du = -2dx \rightarrow dx = -\frac{du}{2}$

Luego, $F = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-(1-2x)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2^2-u^2}}\left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{2^2-u^2}} du = -\frac{1}{2} Arcsen\left(\frac{u}{2}\right) + C$

Volviendo a variable original: $F(x) = -\frac{1}{2} Arcsen\left(\frac{1-2x}{2}\right) + C$

5.8. MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES

Se aplica la denominada fórmula de integración por parte (FIPP): $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Dicha fórmula se obtiene tras aplicar el diferencial al producto de dos funciones y luego, la integración adecuada. En efecto:

Diferenciando: $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$

Despejando: $u \cdot dv = d(u \cdot v) - v \cdot du$

Integrando: $\int u \cdot dv = \int d(u \cdot v) - \int v \cdot du$

Finalmente: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

OBSERVACIÓN. Este método se usa cuando en el integrando hay factores indicados, funciones trigonométricas inversas o logaritmos.

En la separación de factores, el dv tiene que contener el diferencial de la integral dada y debe ser el más complicado pero factible de ser integrado.

PROCESO. Consiste en partir de la integral dada, dos factores identificados a manera de un cambio de variable con u y dv (diferencial de v). Inmediatamente al integrar se halla v, así como el diferencial de u, du; luego se procede a usar la FIPP.

Ejemplo 1. Se presenta integrales resueltas *usando el método de integración por partes.*

a) $F(x) = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{8x}\, dx}_{dv}$ CV: (i) $u = x \rightarrow du = dx$.

(ii) $dv = e^{8x}dx \rightarrow \int dv = \int e^{8x}dx \rightarrow v = \frac{1}{8}e^{8x}$

$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{8x}\, dx}_{dv} = (x)\left(\frac{1}{8}e^{8x}\right) - \int \frac{1}{8}e^{8x}dx = \frac{1}{8}xe^{8x} - \frac{1}{8}\int e^{8x}dx = \frac{1}{8}xe^{8x} - \frac{1}{8}\frac{1}{8}e^{8x} + C$

Es decir, $F(x) = \frac{1}{8}xe^{8x} - \frac{1}{64}e^{8x} + C$

b) $F(x) = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{Cos(2x)\, dx}_{dv}$ CV: (i) $u = x \rightarrow du = dx$.

(ii) $dv = Cos(2x)dx \rightarrow \int dv = \int Cos(2x)dx \rightarrow v = \frac{1}{2}Sen(2x)$

$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{Cos(2x)\, dx}_{dv} = (x)\left(\frac{1}{2}Sen(2x)\right) - \int \frac{1}{2}Sen(2x)dx = \frac{1}{2}x\, Sen(2x) - \frac{1}{2}\int Sen(2x)dx$

$= \frac{1}{2}x\, Sen(2x) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}Cos(2x)\right) + C = \frac{1}{2}x\, Sen(2x) + \frac{1}{4}Cos(2x) + C$

Es decir, $F(x) = \frac{1}{2}x\, Sen(2x) + \frac{1}{4}Cos(2x) + C$

c) $F(x) = \int \underbrace{Ln\, x}_{u} \underbrace{dx}_{dv}$ CV: (i) $u = Ln\, x \rightarrow du = \frac{1}{x}dx$.

(ii) $dv = dx \rightarrow v = x$

$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{Ln\, x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x\, Ln\, x - \int x\frac{1}{x}dx = x\, Ln\, x - \int dx = x\, Ln\, x - x + C$

Es decir, $F(x) = x\, Ln\, x - x + C$

d) $F(x) = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{Sec\, x \cdot \mathrm{Tan}\, x\, dx}_{dv}$ CV:(i) $u = x \rightarrow du = dx$.

(ii) $dv = Sec\, x \cdot \tan x\, dx \rightarrow v = Sec\, x$

$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{Sec\, x \cdot Tan\, x\, dx}_{dv} = x\, Sec\, x - \int Sec\, x\, dx = x\, Sec\, x - Ln[Sec\, x + \mathrm{Tan}\, x] + C$

Es decir, $F(x) = x\, Sec\, x - Ln[Sec\, x + \mathrm{Tan}\, x] + C$

e) $F(x) = \int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^{-2x}dx}_{dv}$ CV: (i) $u = x^2 \to du = 2x\,dx$.

(ii) $dv = e^{-2x}dx \quad \to \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^{-2x}dx}_{dv} = -x^2\,\frac{1}{2}e^{-2x} - \int \frac{-1}{2}e^{-2x}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int xe^{-2x}\,dx$

$F(x) = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{-2x}dx}_{dv}$ CV: (i) $u = x \to du = dx$.

(ii) $dv = e^{-2x}dx \quad \to \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{-2x}dx}_{dv} = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + x\cdot\frac{-1}{2}e^{-2x} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx$

$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}x\,e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}x\,e^{-2x} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}e^{-2x} + C$

Es decir, $F(x) = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \frac{1}{2}x\,e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$

f) $F(x) = \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{Cos\,x\,dx}_{dv}$ CV: (i) $u = e^x \to du = e^x dx$.

(ii) $dv = Cos\,x\,dx \to v = Sen\,x$

$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{Cos\,x\,dx}_{dv} = e^x\,Sen\,x - \int Sen\,x\,(e^x dx) = e^x\,Sen\,x - \int e^x Sen\,x\,dx$

$\Rightarrow F(x) = e^x\,Sen\,x - \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{Sen\,x\,dx}_{dv}$ CV: (i)$u = e^x \to du = e^x dx$.

(ii) $dv = Sen\,x\,dx \to v = -Cos\,x$

$\Rightarrow F(x) = e^x\,Sen\,x - \int \underbrace{e^x}_{u} \underbrace{Sen\,x\,dx}_{dv} = e^x\,Sen\,x - e^x(-Cos\,x) + \int(-Cos\,x)e^x dx$

Es decir, $\int e^x Cos\,x\,dx = e^x\,Sen\,x + e^x Cos\,x - \int e^x Cos\,x\,dx$

De donde, $2\int e^x Cos\,x\,dx = e^x\,Sen\,x + e^x Cos\,x$

Finalmente, $\int e^x Cos\,x\,dx = \frac{e^x}{2}(Sen\,x + Cos\,x) + C$

g) $F(x) = \int \underbrace{Arctan\,x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}$ CV: (i) $u = Arctan\,x \to du = \frac{1}{1+x^2}dx$.

(ii) $dv = dx \to v = x$

$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{Arctan\, x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = x\, Arctan\, x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx = x\, Arctan\, x - \int \frac{1}{1+x^2} x\, dx$

CV: $u = 1 + x^2 \rightarrow du = 2x\, dx \rightarrow x\, dx = \frac{du}{2}$

$F = x\, Arctan\, x - \int \frac{1}{1+x^2} x\, dx = x\, Arctan\, x - \int \frac{1}{u}\frac{du}{2} = x\, Arctan\, x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du$

$= x\, Arctan\, x - \frac{1}{2} Ln\, u + C$

Volviendo a la variable original: $F(x) = x\, Arctan\, x - \frac{1}{2} Ln\,(1 + x^2) + C$

h) $F(x) = \int \frac{Ln\,(x+1)}{\sqrt{x+1}} = \int \underbrace{Ln(x+1)}_{u} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+1}} dx}_{dv}$

CV: (i) $u = Ln(x+1) \rightarrow du = \frac{1}{x+1} dx$.

(ii) $dv = \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = (x+1)^{-1/2} dx \rightarrow v = 2\sqrt{x+1}$

$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{Ln(x+1)}_{u} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+1}} dx}_{dv} = Ln(x+1) 2\sqrt{x+1} - \int 2\sqrt{x+1} \frac{1}{x+1} dx$

$= 2\sqrt{x+1}\, Ln(x+1) - 2\int (x+1)^{-1/2} dx$

$= 2\sqrt{x+1}\, Ln(x+1) - 2(2)\sqrt{x+1} + C$

Es decir, $F(x) = 2\sqrt{x+1}\, Ln(x+1) - 4\sqrt{x+1} + C$

i) $F(x) = \int Ln^2 x\; dx = \int \underbrace{Ln\, x}_{u} \underbrace{Ln\, x\, dx}_{dv}$ CV: (i) $u = Ln\, x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx$.

(ii) $dv = Ln\, x\, dx \rightarrow v = x\, Ln\, x - x$

$\Rightarrow F(x) = \int \underbrace{Ln\, x}_{u} \underbrace{Ln\, x\, dx}_{dv} = Ln\, x(x\, Ln\, x - x) - \int (x\, Ln\, x - x) \frac{1}{x} dx$

$= Ln\, x(x\, Ln\, x - x) - \int (Ln\, x - 1)\, dx = Ln\, x(x\, Ln\, x - x) - x\, Lnx + x + x + C$

Es decir, $F(x) = x\, Ln^2 x - 2x\, Ln\, x + 2x + C$

EJERCICIO. Resuelva la integral $F(x) = \int e^{ax} Sen(bx) dx$

5.9. INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Este proceso centra su interés en sustituir en el integrando de una integral dada, factores de la forma $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ o $\sqrt{a^2+x^2}$ por funciones trigonométricas mediante un cambio de variable, con el objetivo de transformarlo en otra equivalente que se encuentre en la tabla básica de integrales.

Si aparece $\sqrt{x^2+a^2}$ el cambio de CV: $x = a\,Tan\,t$ resulta ser $\sqrt{x^2+a^2} = a\,Sec\,t$

Si aparece $\sqrt{x^2-a^2}$ el cambio de CV: $x = a\,Sec\,t$ resulta ser $\sqrt{x^2+a^2} = a\,tan\,t$

Si aparece $\sqrt{a^2-x^2}$ el cambio de CV: $x = Sen\,t$ resulta ser $\sqrt{a^2-x^2} = a\,Cos\,t$

Nota: Observe cuidadosamente los arreglos que se hacen en cada ejercicio.

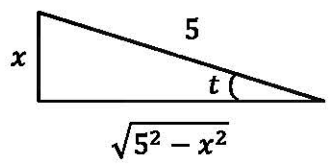
Ejemplo 1. Se da a conocer integrales resueltas *usando Sustitución trigonométrica*.

a) $F(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{25-x^2}}dx = \int \frac{1}{x\sqrt{5^2-x^2}}dx$

El CV: $x = 5\,Sen\,t \to dx = 5\,Cos\,t\,dt \to \sqrt{5^2-x^2} = 5\,Cos\,t$

$\Rightarrow F(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{5^2-x^2}}dx = \int \frac{5\,Cos\,t\,dt}{(5\,Sen\,t)(5Cos\,t)} = \frac{1}{5}\int \frac{1}{Sen\,t}dt = \frac{1}{5}\int Csc\,t\,dt = \frac{1}{5}Ln[Csc\,t - Cot\,t] + C$

Volviendo a la variable original: $Sen\,t = \frac{x}{5}$; $Csc\,t = \frac{5}{x}$ $Cot\,t = \frac{\sqrt{5^2-x^2}}{x}$



Finalmente, $F(x) = \frac{1}{5}Ln\left(\frac{5}{x} - \frac{\sqrt{5^2-x^2}}{x}\right) + C$

b) $F(x) = \int \frac{x^3}{(x^2+4)^{3/2}}dx = \int \frac{x^3}{\left(\sqrt{x^2+2^2}\right)^3}dx$

El CV: $x = 2\,Tan\,t \to dx = 2\,Sec^2 t\,dt \to \sqrt{x^2+2^2} = 2\,Sec\,t$

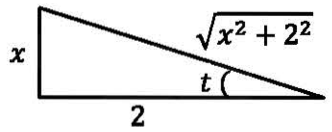
$\Rightarrow F = \int \frac{x^3}{\left(\sqrt{x^2+2^2}\right)^3}dx = \int \frac{(2\,Tan\,t)^3}{(2\,Sec\,t)^3}(2\,Sec^2 t\,dt) = \int \frac{8Tan^3 t}{8\,Sec^3 t}(2\,Sec^2 t\,dt) = 2\int \frac{Tan^3 t}{Sec\,t}dt$

$= 2\int (Tan^2 t \tan t\,Cos\,t)dt = 2\int (Sec^2 t - 1)\frac{Sen\,t}{Cos\,t}Cos\,t\,dt = 2\int (Sec^2 t\,Sen\,t - Sen\,t)\,dt$

$= 2\int(\frac{1}{Cos^2 t}Sen\, t - Sen\, t)\, dt = 2\int(\, Sec\, t\, Tan\, t)dt - 2\int Sen\, t\, dt$

Luego, $F = 2\, Sec\, t + 2\, Cos\, t + C$

Volviendo a la variable original: $Tan\, t = \frac{x}{5};\quad Sec\, t = \frac{\sqrt{x^2+2^2}}{2}\; Cos\, t = \frac{2}{\sqrt{x^2+2^2}}$



$\Rightarrow F = 2Sec\, t + 2\, Cost + C = F(x) = 2\frac{\sqrt{x^2+2^2}}{2} + 2\frac{2}{\sqrt{x^2+2^2}} + C$

Finalmente, $F(x) = \sqrt{x^2+2^2} + \frac{4}{\sqrt{x^2+2^2}}$

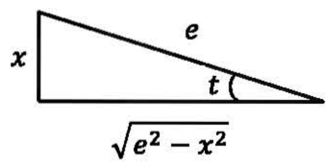
c) $F(x) = \int \frac{1}{(e^2-x^2)^{3/2}}dx = \int \frac{1}{\left(\sqrt{e^2-x^2}\right)^3}dx$

El CV: $x = e\, Sen\, t \rightarrow dx = e\, Cos\, t\, dt \rightarrow \sqrt{e^2-x^2} = e\, Cos\, t$

$\Rightarrow F = \int \frac{1}{(e\, Cos\, t)^3}(e\, Cos\, t\, dt) = \int \frac{1}{(e\, Cos\, t)^3}(e\, Cos\, t\, dt) = \frac{1}{e^2}\int \frac{1}{Cos^2 t}dt = \frac{1}{e^2}\int Sec^2 t\, dt$

$= F = \frac{1}{e^2}Tan\, t + C$

Volviendo a la variable original: $Sen\, t = \frac{x}{e};\quad Tan\, t = \frac{x}{\sqrt{e^2-x^2}}$



Finalmente, $F(x) = \frac{1}{e^2}\frac{x}{\sqrt{e^2-x^2}} + C$

Ejercicios. Resolver las siguientes integrales:

a) $F(x) = \int \frac{1}{(x^2+2^2)^{3/2}}dx$

b) $F(x) = \int \frac{1}{x^2\sqrt{5-x^2}}dx$

c) $F(x) = \int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx$

5.10. INTEGRALES QUE CONTIENEN FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ejemplo 1. Se muestra integrales resueltas *usando identidades trigonométricas.*

a) $F(x) = \int \frac{1}{1+Cos\,x} dx = \int \frac{1}{2\,Cos^2(x/2)} dx = \frac{1}{2}\int Sec^2(x/2)\,dx$

CV: $u = \frac{x}{2} \rightarrow du = \frac{1}{2}dx \rightarrow dx = 2\,du$

$\Rightarrow F = \frac{1}{2}\int Sec^2(x/2)\,dx = Tan\,u + C$

Volviendo a la variable original: $F(x) = Tan\,(x/2) + C$

b) $F(x) = \int \frac{Sen\,x}{1+Cos\,x} dx$ CV: $u = 1 + Cos\,x \rightarrow du = -Sen\,x\,dx \rightarrow -du = Sen\,x\,dx$

$\Rightarrow F = \int \frac{1}{u}(-du) = -\int \frac{1}{u}du = -Ln\,u + C$

Volviendo a la variable original: $F(x) = -Ln(1 + Cos\,x) + C.$

c) $F(x) = \int \frac{Sen(2x)}{Cos\,x} dx = \int \frac{2Sen(x)\,Cos(x)}{Cos(x)} dx = 2\int Sen\,x\,dx = -2\,Cos\,x + C$

POTENCIAS PARES DE SENO O COSENO. Se aplica el seno o coseno del ángulo mitad.

a) $Sen^2x = \frac{1-Cos(2x)}{2}$ b) $Cos^2x = \frac{1+Cos(2x)}{2}$

Ejemplo 2. Véase la solución de las integrales:

a) $F(x) = \int Cos^2x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{Cos(2x)}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int(1 + Cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}Sen(2x)\right) + C$

Es decir, $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}Sen(2x) + C$

b) $F(x) = \int Sen^4x\,dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{Cos(2x)}{2}\right)^2 dx = \int \frac{1-2\,Cos(2x)+Cos^2(2x)}{4} dx$

$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int 2Cos(2x)dx + \frac{1}{4}\int Cos^2(2x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}Sen(2x) + \frac{1}{4}\int \frac{1+Cos(4x)}{2} dx$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}Sen(2x) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}Sen(4x)\right) + C = = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}Sen(2x) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}Sen(4x) + C$

Es decir, $F(x) = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}Sen(2x) + \frac{1}{32}Sen(4x) + C$

POTENCIAS IMPARES DE SENO O COSENO. Se busca usar la fórmula $Sen^2x + Cos^2x = 1$

Ejemplo 3. Véase la solución de las integrales:

a) $F(x) = \int Sen^3x\,dx = \int Sen^2x\,Sen\,x\,dx = \int (1 - Cos^2x)\,Sen\,x\,dx$

$= \int Sen\,x\,dx - \int Cos^2x\,Sen\,x\,dx$ CV: $u = Cos\,x \to du = -Sen\,x\,dx$

$= -Cos\,x - \int u^2(-du) = -Cos\,x + \int u^2du = -Cos\,x + \frac{1}{3}u^3 + C$

Es decir, $F(x) = -Cos\,x + \frac{1}{3}Cos^3x + C$

b) $F(x) = \int Cos^3x\,dx = \int Cos^2x\,Cos\,x\,dx = \int (1 - Sen^2x)\,Cos\,x\,dx$

$= \int Cos\,x\,dx - \int Sen^2x\,Cos\,x\,dx$ CV: $u = Sen\,x \to du = Cos\,x\,dx$

$= Sen\,x - \int u^2du = Sen\,x - \frac{1}{3}u^3 + C$

Es decir, $F(x) = Sen\,x - \frac{1}{3}Sen^3x + C$

c) $F(x) = \int Cos^5x\,dx = \int Cos^4x\,Cos\,x\,dx = \int (1 - Sen^2x)^2\,Cos\,x\,dx$

$= \int (1 - 2\,Sen^2x + Sen^4x)^2\,Cos\,x\,dx$

$= \int Cos\,x\,dx - 2\int Sen^2x\,Cos\,x\,dx + \int Sen^4x\,Cos\,x\,dx$

CV: $u = Sen\,x \to du = Cos\,x\,dx$

$= Sen\,x - 2\int u^2du + \int u^4du = Sen\,x - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$

Es decir, $F(x) = Sen\,x - \frac{2}{3}Sen^3x + \frac{1}{5}Sen^5x + C$

SENO Y COSENO CON EXPONENTE PAR E IMPAR O VICEVERSA

El exponente impar se transforma en uno par y otro impar, luego se resuelve. En algunos casos puede hacerse esto con cambio de variable para seno o para coseno.

Ejemplo 4. Véase la solución de las siguientes integrales:

a) $F(x) = \int Sen^4x\,Cos\,x\,dx$

CV: $u = Sen\,x \to du = Cos\,x\,dx$

$F(x) = \int Sen^4x\, Cos\, x\, dx = \int u^4 du = \frac{1}{5}u^5 + C$

Es decir, $F(x) = \frac{1}{5}Sen^5x + C$

b) $F(x) = \int Cos^2x\, Sen^3x\, dx = \int Cos^2x\, Sen^2x\, Sen\, x\, dx = \int Cos^2x\, (1 - Cos^2x) Sen\, x\, dx$

$= \int Cos^2x\, Senx\, dx - \int Cos^4x\, Senx\, dx$

CV: $u = Cos\, x \rightarrow \; du = -Sen\, x\, dx \rightarrow \; -du = Sen\, x\, dx$

$= \int u^2(-du) - \int u^4(-du) = -\int u^2 du + \int u^4 du = -\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C$

Es decir, $F(x) = -\frac{1}{3}Cos^3x + \frac{1}{5}Cos^5x + C$

c) $F(x) = \int \frac{Sen^3x}{Cos\, x} dx = \int \frac{Sen^2x\, Sen\, x}{Cos\, x} dx = \int \frac{(1-Cos^2x)}{Cos\, x} Sen\, x\, dx$

CV: $u = Cos\, x \rightarrow \; du = -Sen\, x\, dx = -du = Sen\, x\, dx$

$= \int \frac{(1-Cos^2x)}{Cos\, x} Sen\, x\, dx = \int \frac{(1-u^2)}{u}(-du) = -\int \frac{1}{u} du + \int u\, du = -Ln(u) + \frac{1}{2}u^2 + C$

Es decir, $F(x) = -Ln(Cos\, x) + \frac{1}{2}Cos^2x + C$

d) $F(x) = \int Sen^5x\, Cos^2x\, dx = \int Sen\, x\, Sen^4x\, Cos^2x\, dx = \int (1 - Cos^2x)^2\, Cos^2x\, Sen\, x\, dx$

$= \int (1 - 2Cos^2x + Cos^4x)\, Cos^2x\, Sen\, x\, dx$

$= \int Cos^2x\, Sen\, x\, dx - 2\int Cos^4x\, Sen\, x\, dx + \int Cos^6x\, Sen\, x\, dx$

CV: $u = Cos\, x \rightarrow \; du = -Sen\, x\, dx \rightarrow \; -du = Sen\, x\, dx$

$= \int u^2(-du) - 2\int u^4(-du) + \int u^6(-du) = -\int u^2 du + 2\int u^4 du - \int u^6 du$

$= -\frac{1}{3}u^3 + \frac{2}{5}u^5 - \frac{1}{7}u^7 + C$

Es decir, $F(x) = -\frac{1}{3}Cos^3x + \frac{2}{5}Cos^5x - \frac{1}{7}Cos^7x + C$

PRODUCTOS DEL TIPO: $Sen(ax) \cdot Cos(bx)$ CON a, b números enteros

Se busca usar las siguientes identidades:

$$Sen\,A\cdot Cos\,B=\frac{1}{2}[Sen(A+B)+Sen(A-B)]$$

$$Cos\,A\cdot Sen\,B=\frac{1}{2}[Sen(A+B)-Sen(A-B)]$$

$$Cos\,A\cdot Cos\,B=\frac{1}{2}[Cos(A+B)+Cos(A-B)]$$

$$Sen\,A\cdot Sen\,B=-\frac{1}{2}[Cos(A+B)-Cos(A-B)]$$

Ejemplo 5. Véase la solución de las siguientes integrales:

a) $F(x)=\int Sen(5x)\,Cos(3x)\,dx=\frac{1}{2}\int[Sen(8x)+Cos(2x)]\,dx$

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}Cos(8x)-\frac{1}{2}Cos(2x)\right)+C$

Es decir, $F(x)=-\frac{1}{16}Cos(8x)-\frac{1}{4}Cos(2x)+C$

b) $F(x)=\int Cos(3x)\,Sen(2x)\,dx=\frac{1}{2}\int[Sen(5x)-Sen\,x]\,dx$

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}Cos(5x)+Cos\,x\right)+C$

Es decir, $F(x)=-\frac{1}{10}Cos(5x)+\frac{1}{2}Cos\,x+C$

c) $F(x)=\int Cos(6x)\,Cos(2x)\,dx=\frac{1}{2}\int[Cos(8x)+Cos(4x)]\,dx$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}Sen(8x)+\frac{1}{4}Sen(4x)\right)+C$

Es decir, $F(x)=\frac{1}{16}Sen(8x)+\frac{1}{8}Sen(4x)+C$

d) $F(x)=\int Sen(9x)\,Sen(5x)\,dx=-\frac{1}{2}\int[Cos(14x)-Cos(4x)]\,dx$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{14}Sen(14x)-\frac{1}{4}Sen(4x)\right)+C$

Es decir, $F(x)=-\frac{1}{28}Sen(14x)+\frac{1}{8}Sen(4x)+C$

5.11. INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES

OBSERVACIÓN. Cuando se tiene que integrar una fracción racional, es decir, un cociente de dos polinomios de la forma $r(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, debe tomarse en cuenta lo siguiente:

a) Si en el cociente, el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, entonces dicha fracción se divide hasta que el grado del numerador sea inmediatamente menor que el del denominador. Se usa la división mixta.

b) Si en el cociente, el grado del numerador es menor que el grado del denominador entonces la integral se resuelve usando alguno de los cuatro casos de separación en fracciones simples que se mostrarán en este texto.

CASO 0. Cuando el integrando se tiene que dividir, es decir, cuando el numerador es mayor o igual que el denominador.

Ejemplo 1. Se muestra integrales resueltas *cuando se tiene que dividir*, Caso 0.

a) $F(x) = \int \frac{x^2}{x+1} dx$ Dividiendo se tiene $\frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

$\Rightarrow F(x) = \int \frac{x^2}{x+1} dx = \int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx = \int (x-1)dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - x + Ln(x+1) + C$

Luego, $F(x) = \frac{x^2}{2} - x + Ln(x+1) + C$

b) $F(x) = \int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2} dx$ Dividiendo se tiene $\frac{x^3-x+3}{x^2+x-2} = x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x-2}$

$\Rightarrow F(x) = \int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2} dx = \int \left(x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x-2}\right) dx = \int (x-1)dx + \int \frac{2x+1}{x^2+x-2} dx$

$= \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{2x+1}{x^2+x-2} dx$ CV: $u = x^2 + x - 2 \rightarrow du = (2x+1)dx$

$F = \frac{x^2}{2} - x + \int \frac{1}{u} du = \frac{x^2}{2} - x + Ln(u) + C$

Volviendo a la variable original: $F(x) = \frac{x^2}{2} - x + Ln(x^2 + x - 2) + C$

c) $F(x) = \int \frac{x^2-x}{x^2+x+1} dx$ Dividiendo se tiene $\frac{x^2-x}{x^2+x+1} = 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

$\Rightarrow F(x) = \int \frac{x^2-x}{x^2+x+1} dx = \int \left(1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right) dx = \int dx - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = x - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$

CV: $u = x^2 + x + 1 \rightarrow du = (2x+1)dx$

$F = x - \int \frac{1}{u} du = x + Ln(u) + C$

Volviendo a la variable original: $F(x) = x - Ln(x^2 + x + 1) + C$

d) $F(x) = \int \frac{x^4}{(x-1)^3} dx$ Dividiendo se tiene $\frac{x^4}{(x-1)^3} = x + 3 + \frac{6x^2-8x+3}{(x-1)^3}$. Se resolverá más adelante en el caso 2.

CASO 1. Cuando el denominador contiene factores de primer grado en el que ninguno se repite.

Proceso. Se factoriza el denominador y se separa en fracciones simples del modo siguiente:

a) $\frac{p(x)}{x(x-b)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-b}$

b) $\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$

c) $\frac{p(x)}{x(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$

d) $\frac{p(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$

y así sucesivamente.

Ejemplo 2. Se presenta integrales resueltas *usando Fracciones parciales*, Caso 1.

a) $F(x) = \int \frac{5x-3}{x^2+x} dx = \int \frac{5x-3}{x(x+1)} dx$ Caso 1

A fracciones simples: $\frac{5x-3}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 2 \end{cases}$

Luego, $F(x) = \int \frac{5x-3}{x(x+1)} dx = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1}\right) dx = 3\int \frac{1}{x} dx + 2\int \frac{1}{x+1} dx = 3\,Ln\,x - 2Ln(x+1) + C$

Es decir, $F(x) = 3\,Ln\,x - 2Ln(x+1) + C$

b) $F(x) = \int \frac{2x-19}{6x^2+7x-3} dx = \int \frac{2x-19}{(2x+3)(3x-1)} dx$ Caso 1

A fracciones simples: $\frac{2x-19}{(2x+3)(3x-1)} = \frac{A}{2x+3} + \frac{B}{3x-1} = \frac{A(3x-1)+B(2x+3)}{(2x+3)(3x-1)} = \frac{(3A+2B)x+(3B-A)}{(2x+3)(3x-1)} \Rightarrow \begin{cases} A = 4 \\ B = -5 \end{cases}$

Luego, $F(x) = \int \frac{2x-19}{(2x+3)(3x-1)} dx = \int \left(\frac{4}{2x+3} + \frac{-5}{3x-1}\right) dx = 4\int \frac{1}{2x+3} dx - 5\int \frac{1}{3x-1} dx$

$= 4\frac{1}{2}\,Ln(2x+3) - 5\frac{1}{3}Ln(3x-1) + C$

Es decir, $F(x) = 2\,Ln(2x+3) - \frac{5}{3}Ln(3x-1) + C$

c) $F(x)=\int \frac{8x^2-13x-1}{x(x-1)(x+1)}dx$ Caso 1

A fracciones simples: $\frac{8x^2-13x-1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-3 \\ C=10 \end{cases}$

Luego, $F(x)=\int \frac{8x^2-13x-1}{x(x-1)(x+1)}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{x-1}+\frac{10}{x+1}\right)dx=\int \frac{1}{x}dx-3\int \frac{1}{x-1}dx+10\int \frac{1}{x+1}dx$

$=Ln\,x-3Ln(x-1)+10Ln(x+1)+C$

Es decir, $F(x)=Ln\,x-3Ln(x-1)+10Ln(x+1)+C$

d) $F(x)=\int \frac{5x^2-3}{x^3-x}dx$ Caso 1.

A fracciones simples: $\frac{5x^2-3}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}=\frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$

Luego, $F(x)=\int \frac{5x^2-3}{x(x-1)(x+1)}dx=\int\left(\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)dx=3\int \frac{1}{x}dx+\int \frac{1}{x-1}dx+\int \frac{1}{x+1}dx$

$=3Ln\,x+Ln(x-1)+Ln(x+1)+C$

Es decir, $F(x)=3Ln\,x+Ln(x-1)+Ln(x+1)+C$

CASO 2. Cuando el denominador contiene factores de primer grado en el que alguno se repite.

Proceso: Se factoriza el denominador y se separa en fracciones simples del modo siguiente:

a) $\frac{p(x)}{(x-a)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-b)^2}$

b) $\frac{p(x)}{x^2(x-b)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-b}$

c) $\frac{p(x)}{x(x-b)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{(x-b)^2}$

d) $\frac{p(x)}{(x-a)^2(x-b)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}+\frac{D}{(x-b)^2}$

e) $\frac{p(x)}{x(x-b)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{(x-b)^2}+\frac{D}{(x-b)^3}$

y así sucesivamente.

Ejemplo 3. Se da integrales resueltas *usando Fracciones parciales*, Caso 2.

a) $F(x)=\int \frac{2x+1}{x^2-2x+1}dx=\int \frac{2x+1}{(x-1)^2}dx$ Caso 2

A fracciones simples: $\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)+B}{(x-1)^2} = \frac{Ax+(B-A)}{(x-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \end{cases}$

Luego, $F(x) = \int \frac{2x+1}{(x-1)^2} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}\right) dx = 2\int \frac{1}{x-1} dx + 3\int (x-1)^{-2} dx$

$= 2\,Ln(x-1) + 3\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = 2\,Ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + C$

Es decir, $F(x) = 2\,Ln(x-1) - \frac{3}{x-1} + C$

b) $F(x) = \int \frac{14x+9}{(2x+1)^2} dx$ Caso 2

A fracciones simples: $\frac{14x+9}{(2x+1)^2} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{(2x+1)^2} = \frac{A(2x+1)+B}{(2x+1)^2} = \frac{2Ax+(A+B)}{(x+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A = 7 \\ B = 2 \end{cases}$

Luego, $F(x) = \int \frac{14x+9}{(2x+1)^2} dx = F(x) = \int \left(\frac{7}{2x+1} + \frac{2}{(2x+1)^2}\right) dx = 7\int \frac{1}{2x+1} dx + 2\int (2x+1)^{-2} dx$

$= (7)\frac{1}{2} Ln(2x+1) + (2)\frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{-1}}{-1} + C = \frac{7}{2} Ln(2x+1) - \frac{1}{2x+1} + C\,.$

c) $F(x) = \int \frac{x+1}{x(x-1)^2} dx$ Caso 2

A fracciones simples: $\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = 2 \end{cases}$

Luego, $F(x) = \int \frac{x+1}{x(x-1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + 2\int (x-1)^{-2} dx$

$= Ln\,x - Ln(x-1) + 2\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = Ln\,x - Ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C$

Es decir, $F(x) = Ln\,x - Ln(x-1) - \frac{2}{x-1} + C$

d) $F(x) = \int \frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2} dx$ Caso 2

A fracciones simples: $\frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{cases}$

Luego, $F(x) = \int \frac{3x^2+5x}{(x-1)(x+1)^2} dx = \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx$

$= 2\int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx + \int (x+1)^{-2} dx$

$= 2Ln(x-1) + Ln(x+1) + \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + C = 2Ln(x-1) + Ln(x+1) - \frac{1}{x-1} + C$

Es decir, $F(x) = 2Ln(x-1) + Ln(x+1) - \frac{1}{x-1} + C$

e) $F(x) = \int \frac{x^4}{(x-1)^3} dx$ Caso 2.

Dividiendo se tiene $\frac{x^4}{(x-1)^3} = x + 3 + \frac{6x^2-8x+3}{(x-1)^3}$

$\Rightarrow F(x) = \int \frac{x^4}{(x-1)^3} dx = \int \left(x + 3 + \frac{6x^2-8x+3}{(x-1)^3}\right) dx = \int (x+3)dx + \int \frac{6x^2-8x+3}{(x-1)^3} dx$

A fracciones simples: $\frac{6x^2-8x+3}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \Rightarrow \begin{cases} A = 6 \\ B = 4 \\ C = 1 \end{cases}$

Luego, $F(x) = \int (x+3)dx + \int \frac{6x^2-8x+3}{(x-1)^3} dx$

$= \frac{x^2}{2} + 3x + \int \left(\frac{6}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3}\right) dx$

$= \frac{x^2}{2} + 3x + 6\int \frac{1}{x-1} dx + 4\int (x-1)^{-2} dx + \int (x-1)^{-3} dx$

$= \frac{x^2}{2} + 3x + 6Ln(x-1) + \frac{4(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + C$

$= \frac{x^2}{2} + 3x + 6Ln(x-1) - \frac{4}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$

Es decir, $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + 6Ln(x-1) - \frac{4}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C$

CASO 3. Cuando el denominador contiene factores de segundo grado en el que ninguno se repite.

Proceso: Se factoriza el denominador y se separa en fracciones simples del modo siguiente:

a) $\frac{p(x)}{x(x^2+a)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+a}, a > 0$

b) $\frac{p(x)}{(x-a)(x^2+b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+b}, b > 0$

c) $\frac{p(x)}{(x^2+a)(x^2+b)} = \frac{Ax+B}{x^2+a} + \frac{Cx+D}{x^2+b}, a > 0, b > 0$

y así sucesivamente.

Ejemplo 4. Se muestra integrales resueltas *usando Fracciones parciales*, Caso 3.

a) Demostrar que $F(x)=\int \frac{1}{x^3+8}dx=\frac{1}{24}Ln\left(\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{12}Arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

A fracciones simples: $\frac{1}{x^3+8}=\frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+4}=\frac{A(x^2-2x+4)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2-2x+4)}\Rightarrow$
$\begin{cases} A=1/12 \\ B=-1/12 \\ C=3 \end{cases}$

Luego, $F(x)=\int \frac{1}{(x+2)(x^2-2x+4)}dx=\int \frac{1/12}{x+2}dx+\int \frac{-\frac{x}{12}+\frac{1}{3}}{x^2-2x+4}dx$

$=\frac{1}{12}\int \frac{1}{x+2}dx+\frac{1}{12}\int \left(\frac{x-4}{x^2-2x+4}\right)dx$

$=\frac{1}{12}\int \frac{1}{x+2}dx+\frac{1}{12}\left[\int \left(\frac{x-1}{x^2-2x+4}\right)dx-\int \frac{3}{x^2-2x+4}dx\right]$

$=\frac{1}{12}\int \frac{1}{x+2}dx+\frac{1}{12}\left[\frac{1}{2}\int \left(\frac{2(x-1)}{x^2-2x+4}\right)dx-\int \frac{3}{x^2-2x+4}dx\right]$

$=\frac{1}{24}Ln\left(\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{12}Arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

Es decir, $F(x)=\int \frac{1}{x^3+8}dx=\frac{1}{24}Ln\left(\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{12}Arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$

CASO 4. Cuando el denominador contiene factores de segundo grado en el que alguno se repite.

Proceso: Se factoriza el denominador y se separa en fracciones simples del modo siguiente:

a) $\frac{p(x)}{x(x^2+a)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+a}+\frac{Dx+E}{(x^2+a)^2}, a>0$

b) $\frac{p(x)}{(x-a)(x^2+b)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{Bx+C}{x^2+b}+\frac{Dx+E}{(x^2+b)^2}, b>0$

c) $\frac{p(x)}{(x^2+a)^2(x^2+b)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+a}+\frac{Cx+D}{(x^2+a)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+b}+\frac{Gx+H}{(x^2+b)^2}, a>0, b>0$

y así sucesivamente.

Ejemplo 5. Se da a conocer integrales resueltas *usando Fracciones parciales,* Caso 4.

a) $F(x)=\int \frac{x^3+3x}{(x^2+1)^2}dx$

A fracciones simples: $\frac{x^3+3x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}=\frac{(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D}{(x^2-1)^2}\Rightarrow\begin{cases} A=3 & B=0 \\ C=2 & D=0 \end{cases}$

Luego, $F(x)=\int \frac{x^3+3x}{(x^2+1)^2}dx=\int \left(\frac{1x+0}{x^2+1}+\frac{2x+0}{(x^2+1)^2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+\int(x^2+1)^{-2}\,(2x\,dx)=\frac{1}{2}Ln(x^2+1)+\frac{(x\ +1)}{-1}+C$

$=\frac{1}{2}Ln(x^2+1)-\frac{1}{x^2+1}+C$

Ejercicios. Resolver:

a) $F(x)=\int\frac{4x+3}{4x^3+8x^2+3x}dx$ b) $F(x)=\int\frac{x^3-2}{x^3-x^2}dx$

c) $(x)=\int\frac{x^2+x+10}{(2x-3)(x^2+4)}dx$ d) $(x)=\int\frac{x^5}{(x^2+4)^2}dx$

5.12. PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

En ciertos hechos o sucesos de la realidad, resulta más simple determinar su razón de cambio; con lo cual aparecen modelos como los siguientes: Rapidez de crecimiento de una población, rapidez con la que se desarrolla un comercio, rapidez con que cicatriza una herida, razón de cambio con la que se desarrolla una epidemia, etc.

Si en una función se conoce la rapidez o la razón de cambio (es decir se conoce la derivada) $y=f(x)$ y asimismo se tiene conocimiento del valor de la variable dependiente para cierto valor fijo de la variable independiente $f(x_0)=y_0$, entonces a menudo se puede encontrar la función original usando la integración. Esto será expuesto por medio de ejemplos directos:

Ejemplo 1. (FUNCIÓN DE UTILIDAD) Si la utilidad marginal por producir "x" unidades de un producto se calcula mediante el modelo $P'(x)=50-0{,}04x$ con $P(0)=0$; donde $P(x)$ es la utilidad en dólares. Encuentre la función de utilidad $P(x)$ y luego, la utilidad sobre la producción de 100 unidades.

Recordemos que la utilidad marginal *es la derivada de la función de utilidad*, y que la utilidad de vender cero unidades reporta cero dólares; por lo tanto el problema consiste en encontrar la función $P(x)$ sabiendo que $P'(x)=50-0{,}04x$ con $P(0)=0$

Iniciamos la integración: $P'(x)=50-0{,}04x$

Equivalentemente: $\frac{dP(x)}{dx}=50-0{,}04x \quad\rightarrow\quad dP(x)=(50-0{,}04x)dx$

Integrando ambos lados: $\int dP(x)=\int(50-0{,}04x)dx$

De donde, $P(x)=50x-0{,}02x^2+C$

Usando la condición $P(0)=0$ para hallar el valor de C: $P(0)=C\rightarrow C=0$

Es decir, la función de utilidad queda expresada por $P(x) = 50x - 0{,}02x^2$

Ahora podemos calcular la utilidad P para cualquier valor de la variable independiente "x". Nos piden $P(100) = 50(100) - 0{,}02(100)^2 = 4800$.

Esto significa que para una venta (producción) de 100 unidades del producto, se espera recibir 4800 dólares de utilidad.

Ejemplo 2. (HERIDA QUE CICATRIZA) Si el área de una herida que cicatriza cambia con una rapidez que se calcula usando el modelo $A'(t) = -4t^{-3}$ con $1 \leq t \leq 10$; donde t es el tiempo dado en días y $A(1) = 2$ en centímetros cuadrados. ¿Cuál será el área de la herida después de 2; 6 y 10 días?

Solución.

La herida cicatriza con una rapidez dada por la derivada del área A; el área para el primer día $t = 1$ será de 2 cm²; por ende, el problema consiste en encontrar la función $A(t)$ sabiendo que $A'(t) = -4t^{-3}$ con $A(1) = 2$

Iniciamos la integración desde $A'(t) = -4t^{-3}$

Equivalentemente: $\frac{dA}{dt} = -4t^{-3} \quad \rightarrow \quad dA = -4t^{-3}dt$

Integrando ambos lados: $\int dA = -\int 4t^{-3}dt \rightarrow A(t) = -4\frac{t^{-2}}{-2} + C \rightarrow A(t) = 2t^{-2} + C$

Usando la condición $A(1) = 2$ para hallar el valor de C: $A(1) = 2 + C \rightarrow C = 0$

Es decir, la función de utilidad queda expresada por $A(t) = 2t^{-2}$

Ahora se puede calcular la utilidad P para cualquier valor de la variable independiente "t". Nos piden:

$A(2) = 2(2)^{-2} = 0{,}5$ cm² $\quad A(6) = 2(6)^{-2} = 0{,}05$ cm² $\quad A(10) = 2(10)^{-2} = 0{,}02$ cm²

Esto significa que en tanto transcurren los días, el área de la herida disminuye.

Ejemplo 3. (CONTAMINACIÓN) Un barco tanque se encuentra encallado en un arrecife dejando escapar aceite, el cual produce una mancha que se extiende con una rapidez cuantificada mediante la fórmula $\frac{dR}{dt} = \frac{60}{\sqrt{t+9}}$ con $t \geq 0$.

Donde R es el radio en pies de la mancha circular después de t minutos. Calcule el radio de la mancha luego de 7, 10 y 15 minutos, teniendo en cuenta que el radio es cero para cuando el tiempo es cero.

Solución.

La rapidez de crecimiento del radio de la mancha está dada por la derivada de la función radio $R'(t)$, asimismo, el radio es cero para cuando t=0; en consecuencia, el problema consiste en encontrar la función $R(t)$ sabiendo que $\frac{dR}{dt} = \frac{60}{\sqrt{t+9}}$

Iniciamos la integración: $\frac{dR}{dt} = \frac{60}{\sqrt{t+9}}$

Equivalentemente: $dR = 60(t+9)^{-1/2}dt$

Integrando ambos lados: $\int dR = \int 60(t+9)^{-1/2}dt \quad \rightarrow \quad R(t) = \frac{60}{1/2}(t+9)^{1/2} + C$

Usando la condición $R(0) = 0$ para hallar el valor de C: $R(0) = 120(3) + C \;\rightarrow\; C = -360$

Es decir, la función de utilidad queda expresada por $R(t) = 120(t+9)^{1/2} - 360$

Ahora se puede calcular el radio R para cualquier tiempo "t" transcurrido. Particularmente piden:

$R(7) = 120(7+9)^{1/2} - 360$=120 pies de radio.

$R(10) = 120(10+9)^{1/2} - 360 = 163{,}067$ pies de radio.

$R(15) = 120(15+9)^{1/2} - 360 = 240$ pies de radio.

Esto significa que el radio de la mancha de aceite va creciendo a medida que el tiempo pasa.

Ejemplo 4. (GEOMÉTRICO) Encuentre la ecuación de la curva que pasa por el punto $(2;5)$ si la pendiente para cualquier valor de x se obtiene de $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Solución.

Interesa encontrar la función $y = f(x)$ tal que $\frac{dy}{dx} = 2x$, y que $y = 5$ cuando $x = 2$

Reescribiendo la pendiente dada: $\frac{dy}{dx} = 2x \quad \rightarrow \quad dy = 2x\,dx$

Integrando ambos lados: $\int dy = \int 2x\,dx \quad \rightarrow \quad y = \frac{2x^2}{2} + C$

De donde se obtiene $y = x^2 + C$ o $\rightarrow$ $f(x) = x^2 + C$

Usando la condición $y = 5$ para $x = 2$ (o que $f(2) = 5$) se halla el valor de C:

$$f(2) = 5 \quad \rightarrow \quad (2)^2 + C = 5 \;\rightarrow\; C = 1.$$

Entonces la función finalmente es $f(x) = x^2 + 1$

Cuya gráfica resulta de este modo:

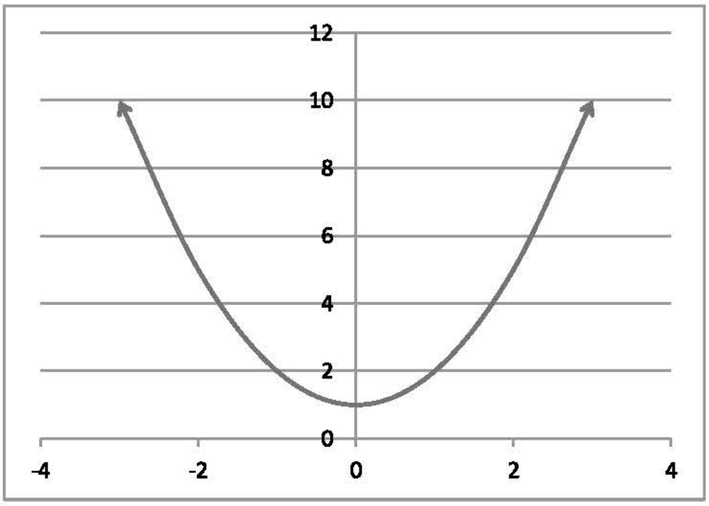


Figura 5.1

Ejemplo 5. (FUNCIÓN DE INGRESO PARA DOS ARTÍCULOS) Una compañía editorial vende un libro de cálculo a 20 dólares y cierta novela a 4. Después de "t" meses, las ventas del primero están aumentando con una rapidez que se calcula mediante $C'(t) = e^t$ (en libros por mes) y las de la novela, con una rapidez de $N'(t) = t^{1/2}$ (en libros por mes). Inicialmente, el ingreso combinado proveniente de las ventas de ambos libros es de \$6 000. Halle el ingreso total por la venta de estos libros a los "t" meses, específicamente para $t = 4$ meses y para $t = 9$ meses.

Solución.

El ingreso total será planteado por $R(t) = 20C(t) + 4N(t)$, siendo $C(t)$ la función que dará los ingresos por la venta de los libros de cálculo y $N(t)$, por la venta de las novelas, en el tiempo "t".

De aquí se obtiene que $R'(t) = 20\,C'(t) + 4N'(t) = 20\,e^t + 4\,t^{1/2}$.

También $\frac{dR}{dt} = 20\,e^t + 4\,t^{1/2} \rightarrow \qquad dR = (20\,e^t + 4\,t^{1/2})dt$

Integrando: $\qquad \int dR = \int (20\,e^t + 4\,t^{1/2})dt \quad \rightarrow \qquad R(t) = 20\,e^t + \frac{8}{3}\,t^{3/2} + C$

Usamos la siguiente condición: por la venta combinada se obtiene \$6 000 para cuando el tiempo es cero (puesto que este es el momento en que se comienza el estudio), es decir, $R(0) = 6000$.

$R(0) = 20\,e^0 + \frac{8}{3}\,(0)^{3/2} + C = 20 + C \qquad \rightarrow \qquad 6000 = 20 + C \qquad \rightarrow \qquad C = 5980$

Finalmente, la función de ingreso es dada por $R(t) = 20\,e^t + \frac{8}{3}\,t^{3/2} + 5980$

Específicamente, se pide $R(4) = 20\,e^4 + \frac{8}{3}\,(4)^{3/2} + 5980 = 7093{,}29$ dólares.

Lo cual significa que a los cuatro meses, la editorial tiene un ingreso de 7093,296 dólares.

También piden $R(9) = 20\,e^9 + \frac{8}{3}\,(9)^{3/2} + 5980 = 168113{,}68$ dólares.

Se entiende que a los nueve meses, la editorial tiene ingresos de 168113,678 dólares.

OBSERVACIÓN. Este tipo de ejercicios de aplicación puede darse para otros métodos de integración, los que exponemos a continuación.

5.13. APLICACIONES QUE INVOLUCRAN FUNCIONES EXPONENCIALES O LOGARÍTMICAS

INTERÉS COMPUESTO CONTINUO.

Siendo A =Cantidad en el tiempo t; P=Capital inicial; r =Tasa anual; t = Tiempo en años; entonces:

a) El interés simple se calcula a partir de la fórmula $A = P + Prt$

b) El interés compuesto será dado por $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$

c) El interés compuesto continuo será $A(t) = Pe^{rt}$

Ejemplo 1. Se invierte \$100 a un interés de 6%, que se compone en forma continua. ¿Qué cantidad habrá en la cuenta luego de 2 años?

Solución. Como es interés compuesto continuo, se emplea $A(t) = Pe^{rt}$

Siendo $P = 100$; $r = 0{,}06$; $t = 2$, se tiene $A(2) = 100e^{(0{,}06)(2)} = 112{,}7497$ dólares.

Significa que al cabo de 2 años habrá 112,7497 dólares en la cuenta.

LEY DEL CRECIMIENTO EXPONENCIAL.

En general, si una cantidad Q cambia a una razón proporcional a la cantidad que presente en un tiempo "t" y $Q(0) = Q_0$, se llega al modelo descrito a través de $\frac{dQ}{dt} = rQ$, con $Q(0) = Q_0$; luego, integrando, se obtiene como solución $Q(t) = Q_0e^{rt}$.

En efecto, $\frac{dQ}{dt} = rQ \;\rightarrow\; \frac{1}{Q}dQ = rdt$

Integrando: $\int \frac{1}{Q}dQ = \int rdt \;\rightarrow\; Ln\,Q = rt + Ln\,C \;\rightarrow\; Ln\,Q - LnC = rt \;\rightarrow Ln\left(\frac{Q}{C}\right) = rt$

$\rightarrow\ e^{Ln(Q/C)} = e^{rt}\ \rightarrow \frac{Q}{C} = e^{rt}\ \rightarrow\ Q(t) = Ce^{rt}$

Usando la condición $Q(0) = Q_0$ para hallar C: $\quad Q(0) = C\ \rightarrow\ Q_0 = C$

Finalmente, $\quad Q(t) = Q_0e^{rt}$

Aquí Q_0 es la cantidad inicial (cuando $t = 0$).

r = Constante de proporcionalidad.

t = Tiempo.

Q = Cantidad en el tiempo "t".

CRECIMIENTO DE **POBLACIÓN**. La población mundial se incrementa a una razón siempre creciente. Lo que puede ser aproximado en ciertos periodos mediante la ley de crecimiento exponencial. Los datos calculados sirven para ciertos periodos, los cuales pueden modificarse mediante políticas a fin de evitar problemas como, por ejemplo, la superpoblación. Son estimaciones que obedecen a datos tomados para realizar los estudios.

Ejemplo 2. La India tenía una población de 500 millones de habitantes en 1966 ($t = 0$) y un índice de natalidad de 3% por año (se supone que se compone de forma continua). Si Q es la población en millones "t" años después de 1966, y continúa el mismo índice de natalidad, entonces: Si $\frac{dQ}{dt} = 0{,}03Q$, con $Q(0) = 500$, estime la población de la India para los años 1986 ($t = 20$), 1996 ($t = 30$) y 2006 ($t = 40$).

Solución.

En primer lugar, debemos hallar $Q = Q(t)$ por integración:

Reescribiendo $\frac{dQ}{dt} = 0{,}03Q\ \rightarrow\ \frac{1}{Q}dQ = 0{,}03\ dt$

Integrando ambos lados: $\int \frac{1}{Q}dQ = \int 0{,}03\ dt\ \rightarrow\ Ln\ Q = 0{,}03t + Ln\ C$

$\rightarrow\ Ln\ Q - LnC = 0{,}03t\ \rightarrow Ln\left(\frac{Q}{C}\right) = 0{,}03t \rightarrow e^{Ln(Q/C)} = e^{0{,}03t}\ \rightarrow \frac{Q}{C} = e^{0{,}03t}$

$\rightarrow\ Q(t) = Ce^{0{,}03t}$

Usamos la condición inicial $Q(0) = Q_0$para hallar el valor de C: $Q(0) = Q_0 = C$, de donde se tiene $Q(t) = Q_0\, e^{0{,}03t}$.

Usando esta Ley de crecimiento exponencial, se obtiene la función que permitirá calcular las diferentes poblaciones pedidas: $\quad Q(t) = 500\ e^{0{,}03t}$

Para 1986 se tiene $t = 20$: $Q(20) = 500\ e^{0{,}03(20)} = 911$ millones de habitantes.

Para 1996 se tiene $t = 30$: $Q(30) = 500\ e^{0,03(30)} = 1229{,}8$ millones de habitantes.

Para 2006 se tiene $t = 40$: $Q(40) = 500\ e^{0,03(40)} = 1660$ millones de habitantes.

DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA Y CARBONO 14.

COMENTARIO. Willard Libby (Premio Nobel en 1946) descubrió que mientras vive una planta o un animal, el carbono 14 radiactivo se mantiene a un nivel constante en sus tejidos. Sin embargo, una vez que muere, este disminuye por desintegración a una razón proporcional a la cantidad presente. Por cuanto se tiene la siguiente relación: $\frac{dQ}{dt} = rQ$, con $Q(0) = Q_0$; con ello se obtiene otro ejemplo de crecimiento exponencial. La rapidez de desintegración del carbono 14 radiactivo es de 0,0001238; lo cual significa que $r = -0{,}0001238$, puesto que la desintegración es un crecimiento negativo.

Ejemplo 3. En un sitio arqueológico de África, se encontró un fragmento de hueso humano. Se estima que hay un 10 % de la cantidad original de carbono 14 radiactivo; calcule la edad del hueso.

Solución.

Con los datos presentados, se tendrá $\frac{dQ}{dt} = -0{,}0001238Q$, con $Q(0) = Q_0$

En forma similar al ejercicio anterior, al integrar se tendrá la función $Q(t) = Q_0\ e^{-0,0001238t}$

Piden lo siguiente: cuánto vale t si $Q(t) = 0{,}1\ Q_0$ de la cantidad inicial, entonces, $0{,}1\ Q_0 = Q_0\ e^{-0,0001238t}$

Despejando t: $t = \frac{Ln(0,1)}{-0,0001238} = 18599{,}23 \approx 18600$ años de antigüedad.

MODELO DE APRENDIZAJE

En ciertas habilidades de aprendizaje, como digitar un teclado o nadar, con frecuencia se utiliza un modelo matemático que supone la existencia de una habilidad máxima alcanzable, digamos M, y la rapidez de mejoramiento en la que dicha habilidad es proporcional a la diferencia entre ese mejoramiento "y" y el valor alcanzable "M". En términos matemáticos: $\frac{dy}{dt} = k(M - y)$, con $y(0) = 0$.

Este problema se resuelve de forma similar a como se calculó la ley de crecimiento exponencial, obteniéndose $y = M(1 - e^{-kt})$

En efecto, $\frac{dy}{dt} = k(M - y) \ \rightarrow\ \frac{1}{y-M}dy = -k\ dt$

Integrando: $\int \frac{1}{y-M} dy = -\int kdt \rightarrow \ Ln(y-M) = -kt + Ln\, C \ \rightarrow \ Ln(y-M) - Ln\, C = -kt$
$\rightarrow Ln\left(\frac{y-M}{C}\right) = -kt$

$\rightarrow \ e^{Ln[\frac{y-M}{C}]} = e^{-kt} \ \rightarrow \ \frac{y-M}{C} = e^{-kt} \ \rightarrow \ y - M = Ce^{-kt} \ \rightarrow \ y(t) = M + Ce^{-kt}$

Usando la condición $y(0) = 0$ para obtener la constante C:

$y(0) = M + C \ \rightarrow \ 0 = M + C \ \rightarrow \ C = -M$

La solución final será $\ y(t) = M - Me^{-kt}$ o $y(t) = M(1 - e^{-kt})$

Nota. Se ha obtenido la función $y = y(t)$ por integración; no obstante, para calcular la rapidez, también puede derivarse dicha función.

Ejemplo 4. La distancia "y" (en pies) que un joven aprendiz de natación es capaz de nadar en un minuto, después de "t" horas de práctica, se determina aproximadamente con la fórmula $y(t) = 50(1 - e^{-0,04t})$. Calcular la rapidez de mejoramiento después de 10, 25 y 40 horas de práctica.

Solución.

Para hallar la rapidez, derivamos con respecto a t: $\quad y(t) = 50(1 - e^{-0,04t})$.

La rapidez es $\ y'(t) = 2e^{-0,04t}$.

Piden lo siguiente:

$y'(10) = 2e^{-0,04(10)}$ =1,34 pies de nado por hora de práctica.

$y'(25) = 2e^{-0,04(25)}$ =0,73 pies de nado por hora de práctica.

$y'(40) = 2e^{-0,04(40)}$ =0,4 pies de nado por hora de práctica.

Observemos: A medida que el tiempo pasa, la rapidez de aprendizaje disminuye.

EXPOSICIÓN DE LOS FENÓMENOS DE CRECIMIENTO EXPONENCIAL.

A continuación, se expone varios modelos de crecimiento bastante frecuentes en las aplicaciones en diversos campos de la ciencia, estos se dividen básicamente en dos grupos: crecimiento limitado y crecimiento ilimitado.

a. MODELO DE CRECIMIENTO ILIMITADO.

Descripción: Una cantidad "y" cambia (aumenta) con una razón proporcional a la cantidad presente en un instante t.

La rapidez es dado por el modelo $\frac{dy}{dt} = ay, a > 0, t > 0$

La condición inicial es $y(0) = C$

Integrando se obtiene la función de *crecimiento ilimitado*: $y(t) = Ce^{at}$

Usos: Crecimiento de población a corto plazo, crecimiento de dinero, consumo de recursos a corto plazo, curvas de precio – demanda.

La gráfica del modelo $y(t) = 50e^{0,5\,t}$ es como sigue:

Figura 5.2

b. MODELO DE DESINTEGRACIÓN .

Descripción: Una cantidad "y" cambia (disminuye) con una razón proporcional a la cantidad presente en un instante t.

La rapidez es dada por el modelo $\frac{dy}{dt} = -ay, a > 0, t > 0$

La condición es dada por: $y(0) = C$

Integrando, se obtiene la función de *desintegración* $y(t) = Ce^{-at}$

Usos: Desintegración radiactiva, absorción de la luz en el agua, presión atmosférica, curvas de precio – demanda.

La gráfica del modelo: $y(t) = 100e^{-a0,5}$ aparece en la Figura 5.3.

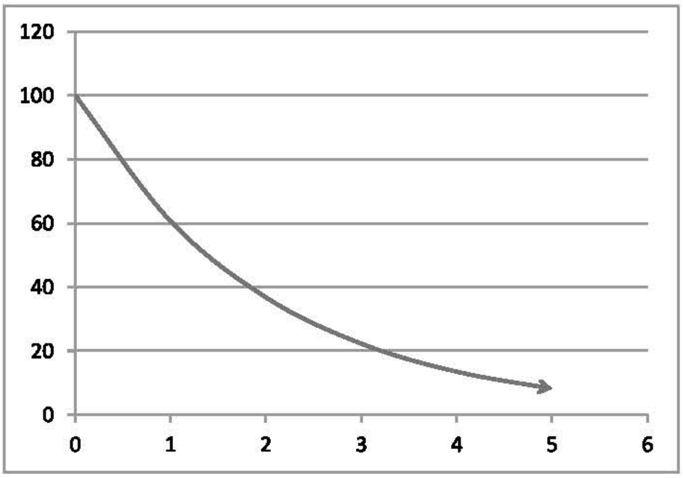


Figura 5.3

c. MODELO DE CRECIMIENTO LIMITADO.

Descripción: Se tiene una habilidad máxima alcanzable M y la rapidez de mejoramiento en la habilidad es proporcional a la diferencia entre ese mejoramiento "y" y el valor alcanzable M.

La rapidez es dado por el modelo $\frac{dy}{dx} = a(M - y), t > 0$

La condición inicial es $y(0) = 0$

Integrando, se obtiene la función de *crecimiento limitado* $y(t) = M(1 - e^{-at})$

Usos: Aprendizaje, venta de productos de moda pasajera, depreciación de vehículos y equipos.

A continuación se gráfica del modelo $y(t) = 100(1 - e^{-0,6t})$.

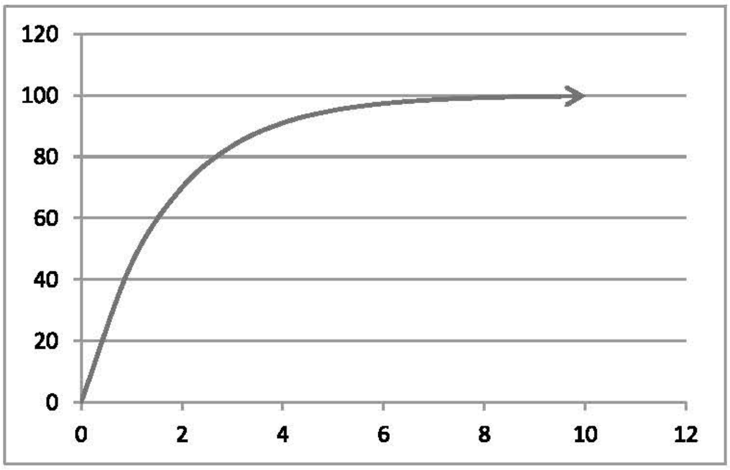


Figura 5.4

d. CRECIMIENTO LIMITADO – CURVA LOGÍSTICA.

La rapidez es dada por el modelo $\frac{dy}{dt} = aky(M - y), t > 0.$

La condición inicial es $y(0) = M$

Integrando, se obtiene la función de *crecimiento limitado* $y(t) = \frac{M}{1+Ce^{-at}}$

Usos: Aprendizaje, crecimiento de población a largo plazo, epidemias, venta de nuevos productos.

La gráfica del modelo $y(t) = \frac{100}{1+80e^{-0,4\,t}}$ es así:

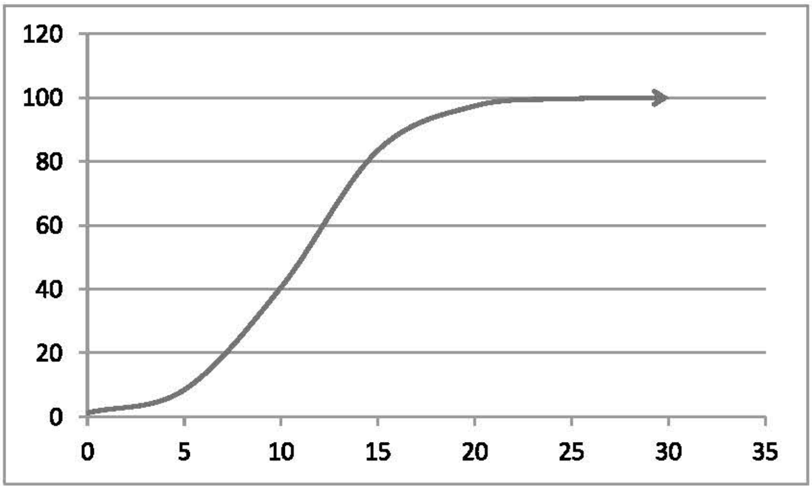


Figura 5.5

5.14. LISTADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Resuélvase por el método de sustitución:

a) $F(x) = \int x^3\sqrt{(3x^2+1)^3}\,dx$

b) $F(x) = \int \frac{1}{x+\sqrt{x}}dx$

c) $F(x) = \int \frac{xe^{\sqrt{x^2+3}}}{\sqrt{x^2+3}}dx$

d) $F(x) = \int \frac{x^2-1}{\sqrt{2x-1}}dx$

e) $F(x) = \int (x+1)\sqrt{2-x}dx$

f) $F(x) = \int \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \frac{dx}{x^2}$

d) Problema. La distancia S (en kilómetros) entre dos automóviles en el instante "t" (en horas) varía con una rapidez dada por $\frac{dS}{dt} = 50\left(\frac{1-e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\right)$. Calcular la distancia $S(t)$ entre los automóviles, después de media hora, si inicialmente se encuentran en el mismo punto.

2. Resuélvase usando integración por partes:

a) $F(x) = \int (2x-3)^5(7-4x)dx$

b) $F(x) = \int xe^{5x}dx$

c) $F(x) = \int x2^x dx$

d) $F(x) = \int x\, Sen\, x\, dx$

e) $F(x) = \int Arccos\, x\, dx$

f) $F(x) = \int e^{3x}Sen(2x)\, dx$

g) $F(x) = \int \frac{1}{x\, Ln\, x}dx$

h) Problema. La función $P(t)$ modela el porcentaje de la población que ha probado un producto nuevo en los "t" primeros meses después de que se lanzó al mercado. La función $P(t)$ para cierto alimento dietético varía con una rapidez que se calcula de $\frac{dP}{dt} = 100\frac{Ln(t+1)}{(t+1)^2}$ con $t \geq 0$. Suponiendo que $P(0) = 0$, hallar el porcentaje de la población que consumió el producto durante su primer mes en el mercado; luego, en los seis primeros meses; y, finalmente, en el primer año.

3. Calcúlese la integral indefinida por sustitución trigonométrica:

a) $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{(25-x^2)^3}}dx$

b) $F(x) = \int \sqrt{16-4x^2}dx$

c) $F(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{4x^2+9}}dx$

d) $F(x) = \int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}dx$

e) $F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^5}}dx$

f) $F(x) = \int x^2\sqrt{x^2-4}dx$

4. Calcúlese cada integral indefinida por fracciones simples:

a) $F(x) = \int \frac{3}{x^2+x-2}dx$ b) $F(x) = \int \frac{x^3-x+3}{x^2+x-2}dx$ c) $F(x) = \int \frac{2x^2+x+8}{(x^2+4)^2}dx$

d) $F(x) = \int \frac{x}{16x^4-1}dx$ e) $F(x) = \int \frac{x^4+4x^3-x^2+5x+1}{x^5+x^4+x^3-x^2-2}dx$

5. Calcúlese las siguientes integrales. Use el método que más se adecúe.

a) $F(x) = \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$ b) $F(x) = \int \frac{e^x}{1-Tan(e^x)}dx$

c) $F(x) = \int Sen^2(2x)dx$ d) $F(x) = \int Cos^3(\sqrt{x})\frac{dx}{\sqrt{x}}$

e) $F(x) = \int \frac{Cos\, x}{1+Sen^2 x}dx$ f) $F(x) = \int \frac{x}{\sqrt{x^4-6x^2+5}}dx$

6. PROBLEMAS DE APLICACIÓN. Resolver los siguientes problemas:

a) (CRECIMIENTO POBLACIONAL) Encuentre el tiempo en que se duplica la población de cierta ciudad si crece en forma continua a razón de 3,2% por año (se entiende que se compone de forma continua).

b) Calcule la edad de un hueso que se encontró en un lugar arqueológico si aún posee el 50% de la cantidad original de carbono 14 radiactivo.

c) (ECOLOGÍA) Para masas de agua relativamente limpias, la intensidad de la luz se reduce según la fórmula $\frac{dL}{dx} = -kL$ con $L(0) = L_0$, donde L es la intensidad de la luz a "x" pies por debajo de la superficie del agua. Para el mar de los Sargazos de las Indias Occidentales, $k = 0{,}00942$. Calcule L en términos de "x", así como la profundidad a la cual se reduce la luz a la mitad, respecto a la superficie.

d) (INSCRIPCIÓN ESCOLAR) La rapidez de incremento proyectada en la inscripción de una nueva universidad se estima mediante la fórmula $\frac{dE}{dx} = 5000(t+1)^{-1/2}$ con $t > 0$, donde $E(t)$ es la inscripción proyectada en "t" años. Si cuando $t = 0$ la inscripción es de 2 000, calcular la inscripción que debe proyectarse para 10, 15 y 20 años en adelante.

e) (LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON) Representamos por "y" la temperatura (en grados) de un objeto en una habitación cuya temperatura se mantiene constante a 60°. Si se enfría el objeto de 100° a 90° en 10 minutos, ¿cuánto tiempo más tardará en descender su temperatura a 80°? Respuesta. 24,09 minutos.

f) La presión atmosférica P (medida en milímetros de mercurio) disminuye exponencialmente cuando la altura "x" (medida en metros) aumenta. Si la presión es de 760 milímetros de mercurio al nivel del mar ($x = 0$) y 672,71 milímetros de mercurio a una altitud de 1 000 metros, calcular la presión a una altura de 2 000, 3 000 y 5 000 metros.