# Capítulo VII

# LA INTEGRAL IMPROPIA

# CAPÍTULO VII

## LA INTEGRAL IMPROPIA

CONTENIDO

7.1. La integral impropia. Convergencia y divergencia.

7.2. Integral impropia en intervalos infinitos.

7.3. Integral impropia para funciones discontinuas en los extremos de su intervalo de integración.

7.4. Integral impropia para funciones discontinuas en puntos internos de su intervalo de integración.

7.5. Otras aplicaciones de la integral impropia.

7.6. Lista de ejercicios propuestos.

## 7.1. LA INTEGRAL IMPROPIA. CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA

Hasta aquí se ha estudiado la integral de Riemann de una función $f$ acotada, la cual es definida en un intervalo cerrado y acotado $I = [a; b]$ con $a$ y $b$ números reales, tales que $a < b$.

La integral impropia no cumple enteramente con los criterios de integración de una integral de Riemann.

En este capítulo, se intentará generalizar el concepto de integral definida para funciones que no verifican alguna de las hipótesis citadas en las definiciones de una integral, es decir:

a) La integral de una función acotada, definida en un intervalo no acotado, por ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $I = [1;\ +\infty\rangle$
b) La integral de una función no acotada, definida en un intervalo no acotado, por ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $I = \langle 0;\ +\infty\rangle$
c) La integral de una función no acotada, definida en un intervalo acotado, por ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x}$ en el intervalo $I = \langle 0;\ 1]$

De calcularse estas integrales, se tendrá dos resultados:

a) Que sea un número real, por lo cual se dirá que la integral es convergente. En este caso se tiene como resultado un número real.
b) Que no sea un número real, por lo cual se dirá que la integral es divergente. En este caso se tiene como resultados, $\infty$ o $-\infty$

Existe más de una forma de clasificar este tipo de integrales. Aquí se ha usado un orden que pasamos a detallar.

## 7.2. LA INTEGRAL IMPROPIA EN INTERVALOS INFINITOS (NO ACOTADOS)

También denominadas integrales impropias de primera clase. Estas se generalizan desde las integrales de Riemann de la siguiente forma:

**DEFINICIÓN 1.** Si $f$ es acotada y continua en el intervalo infinito $I = [a; +\infty\rangle$, entonces se tiene $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$.

La integral impropia anterior converge si el límite existe; de lo contrario, diverge.

**DEFINICIÓN 2.** Si $f$ es acotada y continua en el intervalo infinito $I = \langle -\infty; b]$, entonces se tiene $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$.

La integral impropia anterior converge si el límite existe; de lo contrario, diverge.

**DEFINICIÓN 3**. Si $f$ es acotada y continua en el intervalo infinito $I = \langle -\infty;\ +\infty \rangle$, entonces se tiene $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)dx$, siendo $c$ cualquier número real.

La integral impropia anterior converge si ambos límites existen; de lo contrario, diverge.

Se acostumbra por comodidad tomar al valor de división $c$ como cero, puesto que facilita cálculos.

*Ejemplo 1.* Obtener el volumen del sólido generado por la rama en el primer cuadrante de la curva $y = \frac{1}{x}$, cuando gira alrededor del eje X, y a la derecha de la recta $x = 1$.

*Solución.*

Identificando elementos: $y = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$ y $b = +\infty$

El volumen será dado por

$$V(S) = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx = \pi \int_1^{+\infty} \left[\frac{1}{x}\right]^2 dx = \pi \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \pi \lim_{b\to+\infty} [-x^{-1}]_1^b$$

$$= \pi \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{1}{b} + 1\right] = \pi(1) = \pi\ unid^3.$$

*Ejemplos 2.* Se muestra la resolución de algunas integrales impropias:

a) $L = \int_{-\infty}^{3} \frac{1}{(9-x)^2} dx = \lim_{a\to-\infty} \left[\int_a^3 (9-x)^{-2} dx\right] = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{-1}{x-9}\right]_a^3 = \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{-1}{-6} + \frac{1}{a-9}\right] = \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}$.

b) $L = \int_{-\infty}^{1} e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \left[\int_a^1 e^x dx\right] = \lim_{a\to-\infty} [e^x]_a^1 = \lim_{a\to-\infty} [e^1 - e^a] = e$.

*Ejemplo 3.* Véase el cálculo de la siguiente integral: $L = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+8} dx$.

*Solución*:

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+8} dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 \frac{1}{(x+2)^2+2^2} dx + \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{(x+2)^2+2^2} dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{2} ArcTan\left(\frac{x+2}{2}\right)\right]_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{2} ArcTan\left(\frac{x+2}{2}\right)\right]_0^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{2} ArcTan\left(\frac{0+2}{2}\right) - \frac{1}{2} ArcTan\left(\frac{a+2}{2}\right)\right] + \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{1}{2} ArcTan\left(\frac{b+2}{2}\right) - \frac{1}{2} ArcTan\left(\frac{0+2}{2}\right)\right]$$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}ArcTan(-\infty) + \frac{1}{2}ArcTan(+\infty) - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$.

*Ejemplo 4.* Hallar el área comprendida entre la curva de Agnesi $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ y el eje de las abscisas.

*Solución.*

En la siguiente gráfica se tiene:

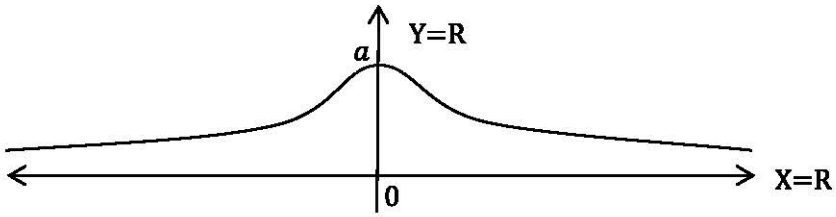


Figura 7.1

El área será dada por $A(D) = 2\int_0^{+\infty} y\, dx = \lim_{b\to\infty} 2\int_0^b \frac{a^3}{x^2+a^2}dx = \lim_{b\to\infty} 2a^3 \int_0^b \frac{1}{x^2+a^2}dx$

$= \lim_{b\to\infty} 2a^3 \left[\frac{1}{a}Arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^b = \lim_{b\to\infty} 2a^3 \left[\frac{1}{a}Arctan\left(\frac{b}{a}\right)\right]_0^b + \lim_{b\to\infty} 2a^3 \left[\frac{1}{a}Arctan\left(\frac{0}{a}\right)\right]_0^b$

$= 2a^2 Arctan\,(\infty) = 2a^2\frac{\pi}{2} = \pi a^2\ unid^2$.

*Ejemplo 5.* Calcular el área de la región limitada por las curvas $y = \frac{2|x|}{1+x^4}$, $y = -\frac{4|x|}{1+x^4}$.

*Solución.*

Tal como se muestra en la Figura 7.2, se tiene:

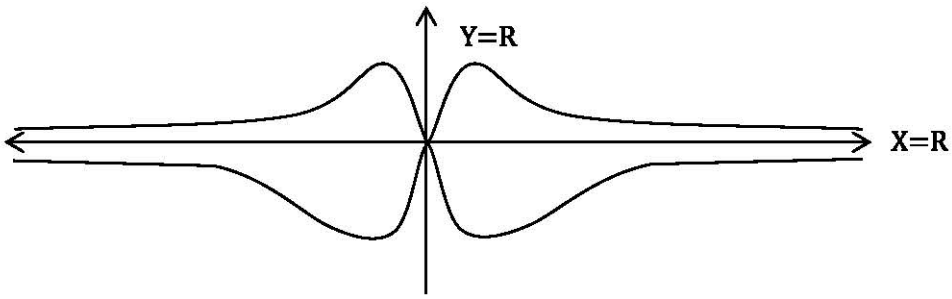


Figura 7.2

El área será dada por $A(D) = 2\int_0^{+\infty}\left(\frac{2x}{1+x^4} - \frac{-4x}{1+x^4}\right)dx = \lim_{b\to\infty} 2\int_0^b \frac{6x}{1+x^4}dx$

$$= \lim_{b\to\infty} 2(3)\int_0^b \frac{2x}{1+(x^2)^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} 6\,[Arctan(x^2)]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} 6\,[Arctan(b^2) - Arctan(0)] = 6\,Arctan\,(\infty) = 6\frac{\pi}{2} = 3\pi\ unid^2\,.$$

***Ejemplo 6***. Hallar el volumen del sólido de revolución, generado al hacer girar la región limitada por las curvas $y = e^x$, $x = 0$ e $y = 0$ alrededor del eje real X=R.

***Solución***.

Bosquejando la gráfica (Figura 7.3), se tiene:

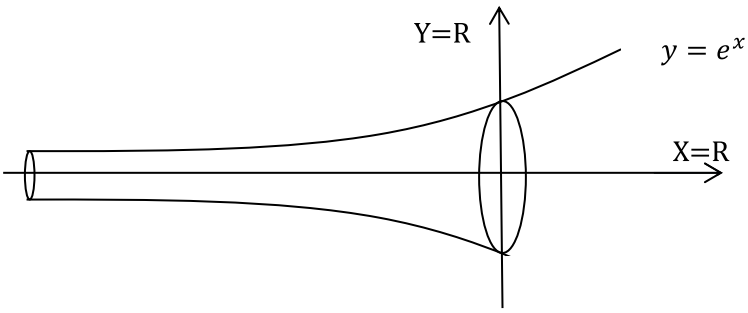


**Figura 7.3**

El volumen será dada por $V(S) = \pi\int_{-\infty}^{0} y^2\,dx = \pi\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \pi\lim_{a\to-\infty}\int_a^0 e^{2x}dx$

$$= \pi\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_a^0 = \pi\lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{2(0)}}{2} - \frac{e^{2a}}{2}\right] = \pi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\ unid^3\,.$$

***Ejercicio***. ¿Es posible asignar un número finito para representar la medida del área de la región limitada por la curva $y = \frac{1}{e^x+e^{-x}}$ y el eje X? Respuesta: La integral es convergente y el área, $A = \frac{\pi}{2}$.

## 7.3. INTEGRAL IMPROPIA PARA FUNCIONES DISCONTINUAS EN LOS EXTREMOS DE SU INTERVALO DE INTEGRACIÓN

Estas integrales tienen puntos de discontinuidad para valores aislados de "$x$" dentro de los límites de integración. Consideremos los tres casos siguientes:

a) Cuando la función no es continua en el extremo izquierdo $x = a$ del intervalo $I$. Caso 1.

b) Cuando la función no es continua en el extremo derecho $x = b$ del intervalo $I$. Caso 2.

CASO 1. La función $y = f(x)$ es continua en el intervalo $I = [a; b]$, excepto en el extremo izquierdo del intervalo $x = a$. Si $a < b$ y sea el número $\varepsilon > 0$, entonces:

**DEFINICIÓN** 1. La integral impropia se puede expresar como $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$, siempre que este límite exista. (Ver Figura 7.4).

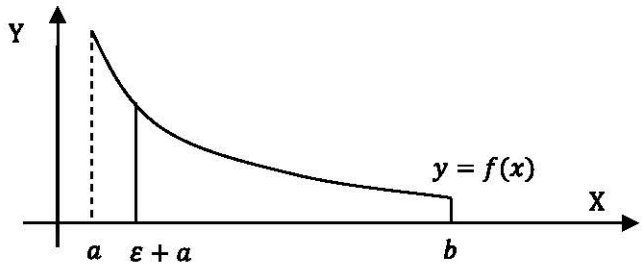


Figura 7.4

CASO 2. La función $y = f(x)$ es continua en el intervalo $I = [a; b]$ excepto en el extremo derecho del intervalo $x = b$. Si $a < b$ y sea el número $\varepsilon > 0$, entonces:

**DEFINICIÓN** 2. La integral impropia puede expresarse como $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, siempre que este límite exista. (Ver Figura 7.5).

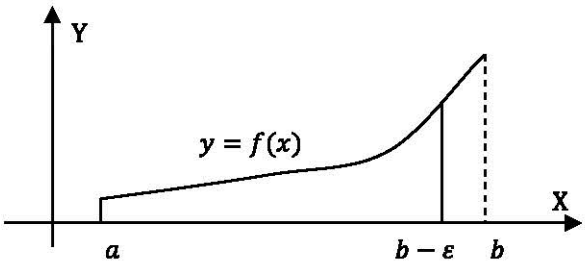


Figura 7.5

*Ejemplo 1.* Se muestra el desarrollo de la integral impropia: $L = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx$.

Observamos que integrando la función, esta se hace indeterminada para el extremo derecho $x = 4$ en el intervalo $I = [0;\ 4]$.

$$L = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{4-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[ Arcsen\left(\frac{x}{4}\right) \right]_0^{4-\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[ Arcsen\left(\frac{4-\varepsilon}{4}\right) - Arsen(0) \right] = Arcsen(1) - Arcsen(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

En este caso la integral es convergente.

*Ejemplo 2.* Calcule la integral impropia $L = \int_1^2 \frac{1}{1-x} dx$.

*Solución.*

La función $y = \frac{1}{1-x}$ no es continua en el extremo izquierdo del intervalo $I = [1; 2]$, es decir, en $x = 1$.

$$L = \int_1^2 \left(\frac{1}{1-x}\right) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \left(\frac{1}{1-x}\right) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} [-Ln(1-x)]_{1+\varepsilon}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} [-Ln(1-2) + Ln(1-(1+\varepsilon))] = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[Ln\left(\frac{\varepsilon}{1}\right)\right] = -\infty .$$

En este caso, la integral es divergente.

*Ejemplo 3.* Se muestra el desarrollo de la integral impropia $L = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$.

Observamos que integrando la función, esta se hace indeterminada para el extremo izquierdo $x = 0$ en el intervalo $I = [0;\ 1]$.

$$L = \int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-2} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} [-x^{-1}]_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right]_\varepsilon^1 = \infty .$$

En este caso, la integral es divergente.

## 7.4. INTEGRAL IMPROPIA PARA FUNCIONES DISCONTINUAS EN PUNTOS INTERNOS DE SU INTERVALO DE INTEGRACIÓN

Cuando la función no es continua para un valor interno "$x = c$" dentro del intervalo $I$. Caso 3.

CASO 3. Sea $c$ un número real comprendido entre $a$ y $b$ del intervalo $I = [a; b]$; y sea $y = f(x)$, una función continua para todos los valores $x \in I = [a; b]$, excepto para $x = c$. Siendo $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, con $a < b$, entonces:

DEFINICIóN 1. $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$, siempre que estos límites existan.

*Ejemplo 1.* Se presenta el desarrollo de la integral impropia $L = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx$.

Observamos que integrando la función, eta se hace indeterminada para $x = 0 \in [-2, 2]$.

$$L = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{-2}^{0-\varepsilon_1} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{0+\varepsilon_2}^2 \frac{1}{x^2} dx, \text{ siendo } \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_{-2}^{-\varepsilon_1} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{\varepsilon_2}^2 \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} [-x^{-1}]_{-2}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} [-x^{-1}]_{\varepsilon_2}^2$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0}\left[\frac{-1}{-\varepsilon_1} - \frac{-1}{-2}\right] + \lim_{\varepsilon_2 \to 0}\left[\frac{-1}{2} - \frac{-1}{\varepsilon_2}\right] = \lim_{\varepsilon_1 \to 0}\left[\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{2}\right] + \lim_{\varepsilon_2 \to 0}\left[\frac{-1}{2} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right]$$

$$= +\infty + \infty = \infty\,.$$

En este caso, la integral es divergente.

*Ejercicio.* Calcular $L = \int_0^{3a} \frac{2x}{(x^2-a^2)^{2/3}}\,dx$ . (Ver Figura 7.6).

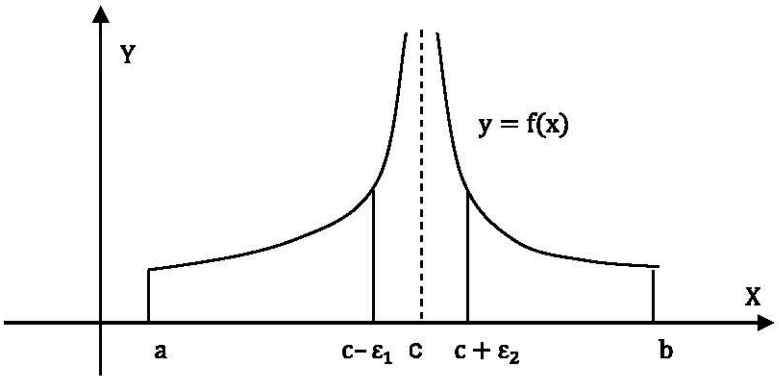


Figura 7.6

*Solución.* Integrando la función, esta se hace indeterminada para $x = \pm a$; en el intervalo $I = [0;\ 3a]$, el punto de discontinuidad es $x = a$.

Rpta. $L = 9a^{2/3}$ .

## 7.5. OTRAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL IMPROPIA

***OBSERVACIÓN 1.*** Notemos que estos ejemplos corresponden a integrales impropias que tienen intervalo no acotado en un extremo.

*Ejemplo 1.* Un nuevo invento para el control de la diabetes consiste en un dispositivo que se implanta en el paciente y que libera lentamente un suministro continuo de insulina en el torrente sanguíneo. Suponga que se diseña este dispositivo para que libere insulina con una rapidez $f(t) = \frac{1}{2}te^{-0,9t}$ centímetros cúbicos por día. Calcule la cantidad de insulina liberada por la capsula implantada en el tiempo que dura.

*Solución.*

Graficando este hecho en la Figura 7.7, se tendrá:

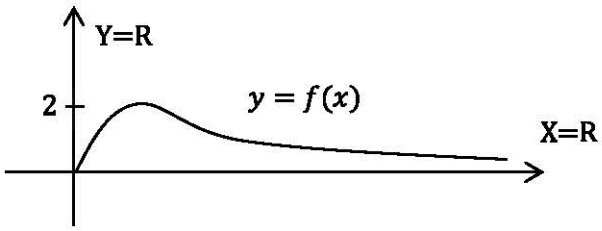


Figura 7.7

El área de la región representará la cantidad total de insulina que el dispositivo ha de liberar durante su vida útil.

Entonces, $A(D) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} te^{-0,09t}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{1}{2} te^{-0,09t}\,dt$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{te^{-0,09t}}{-0,09} - \frac{e^{-0.09t}}{(-0,09)^2}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{be^{-0,09b}}{-0,09} - \frac{e^{-0.09b}}{(-0,09)^2} - \frac{(0)e^{-0,09(0)}}{-0,09} + \frac{e^{-0.09(0)}}{(-0,09)^2}\right]$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{be^{-0,09b}}{-0,09} - \frac{e^{-0.09b}}{0,09^2} + \frac{1}{0,09^2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{0,0081}\right) = 61,73\ cm^3\ .$$

Esto significa que durante toda su vida útil, el dispositivo necesita de 61,73 $cm^3$ de insulina.

*Ejemplo 2.* Se está utilizando un combustible fósil con una rapidez determinada mediante $f(t) = \frac{10^4}{(t+1)^{3/2}}$ toneladas por año. Calcular la cantidad total de combustible que se necesita de ahora en adelante.

*Solución.*

La cantidad total será determinada por $V = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{10^4}{(t+1)^{3/2}}\,dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{10^4}{(t+1)^{3/2}}\,dt$

$$= \lim_{b\to+\infty} 10^4 \left[\frac{-2}{(t+1)^{1/2}}\right]_0^b = \lim_{b\to+\infty} 10^4 \left[\frac{-2}{(b+1)^{1/2}} - \frac{-2}{(0+1)^{1/2}}\right] = 2(10^4) \text{ toneladas de combustible.}$$

## 7.6. LISTA DE EJERCICIOS PROPUESTOS

### LA INTEGRAL IMPROPIA. CONVERGENCIA Y DIVERGENCIA.

1. Hallar todos los valores de "$p$" para los cuales, la integral $N = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge.

2. Determinar todos los valores de "$p$" para los cuales, la integral $N = \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$ converge.

### INTEGRAL IMPROPIA EN INTERVALOS INFINITOS.

1. Resolver:

a) $N = \int_{-\infty}^{0} xe^{-2x} dx$ b) $N = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ c) $N = \int_0^{+\infty} e^x Cos\, x\, dx$

d) $N = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\, dx$ e) $N = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{e^x}}\, dx$

2. Calcular el área de la región "infinita" dada por $y = \frac{1}{x^3}$ y el eje X, sobre el intervalo $I = [1; +\infty]$.

3. Se está utilizando un combustible con la rapidez $Q'(t) = \frac{10^4}{t+4}$ toneladas por año. Hallar la cantidad total $Q(t)$ necesaria para todo el tiempo de aquí en adelante.

### INTEGRAL IMPROPIA PARA FUNCIONES DISCONTINUAS EN LOS EXTREMOS DE SU INTERVALO DE INTEGRACIóN.

1. Resolver:

a) $N = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ b) $N = \int_0^2 \frac{1}{(x-2)^2} dx$ c) $N = \int_0^9 \frac{1}{\sqrt{9-x}} dx$

2. Demostrar que $N = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x} dx = -\infty$.

### INTEGRAL IMPROPIA PARA FUNCIONES DISCONTINUAS EN PUNTOS INTERNOS DE SU INTERVALO DE INTEGRACIóN.

*Ejercicio.* Resolver lo siguiente:

a) $N = \int_{-1}^{8} x^{-1/3} dx$ b) $N = \int_0^4 \frac{1}{(x-2)^{2/3}} dx$ c) $N = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|1-x|}} dx$