

Capítulo I

FUNCIONES VARIABLES DE VARIABLES REALES

CAPÍTULO I

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

CONTENIDO

- 1.1. Función real: Dominio, imagen y gráfica.
- 1.2. Clases de funciones. Funciones elementales.
- 1.3. Operaciones con funciones. Composición de funciones.
- 1.4. Transformaciones de una función real.
- 1.5. Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva.
- 1.6. Función inversa.
- 1.7. Características de las funciones reales: Creciente, decreciente, par, impar y periódica.
- 1.8. Funciones trascendentes: Exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.
- 1.9. Funciones como modelos matemáticos. Problemas de aplicación.
- 1.10. Lista de ejercicios propuestos.

1.1. FUNCIÓN REAL: DOMINIO, IMAGEN Y GRÁFICA

INICIANDO. Estimados lectores, si han llegado hasta aquí es que ya conocen y recuerdan muchos temas, conceptos y propiedades tanto de la aritmética como del álgebra; si juntamos algunos de ellos, podemos darle forma concreta y crear una función.

Consideremos cuatro vasijas:

La primera llena con las siguientes operaciones: suma, resta, multiplicación, división, potencia y raíz.

La segunda con letras y variables mayúsculas: A, B, C,..., Y, Z; y minúsculas: a, b, c,..., y, z.

La tercera tiene todos los números reales que conocemos: 1; 2; -3; $\sqrt{2}$; π ; $\frac{2}{3}$; etc.

La cuarta llena de reglas de correspondencia entre dos variables: algebraicas, valor absoluto, logaritmos, funciones exponenciales, funciones trigonométricas y otras inventadas por la imaginación humana.

Juntamos algunos elementos de las 4 vasijas formando expresiones y le colocamos un nombre; resultado: $P = 2x + 3$, $Q = (t - 2)^2$, $f = 1 + 3x - x^2$, $g = \frac{y}{6-y}$

$$M = \sqrt{6x - 2}, \quad L = 2 \cos(x + 15) \quad N = \log(9t - 10) \quad P = |15 - 4x|$$

Cada resultado anterior es ejemplo de una función real.

Lógicamente, también se puede construir expresiones que no representan funciones; sin embargo, estas no resultan de interés en esta parte del estudio, como sí lo son las relaciones binarias.

INTRODUCCIÓN. Una *función real de variable real* o simplemente *función real* $y = f(x)$ es un refinamiento de las relaciones binarias que se establece de forma intencional entre los elementos de dos conjuntos; buscando así una mejor descripción y representación de los hechos, sucesos o magnitudes en sus aplicaciones sobre los diferentes campos de las ciencias.

El refinamiento se establece en las reglas de correspondencia, el cual consiste en que para el elemento x del conjunto de partida exista un único elemento y en el conjunto de llegada.

Veamos el siguiente ejemplo:

Si por la compra de 1 piña me cobran 2 soles por el costo de producción y 1 sol más como costo fijo debido al uso de instalaciones, entonces el costo total será de $2(1)+1=3$. Por 2 piñas me cobran 4 soles por el costo de producción y 1 sol más como costo fijo debido al uso de instalaciones; por tanto, ahora el costo total será de $2(2)+1=5$. Así, sucesivamente, se puede construir la siguiente tabla:

Cantidad de piñas	Costo variable + costo fijo	Costo total según el número de piñas
0	$2(0)+1$	$f(0) = 1$

1	$2(1)+1$	$f(1) = 3$
2	$2(2)+1$	$f(2) = 5$
3	$2(3)+1$	$f(3) = 7$
...	...	...
x	$2(x)+1$	$f(x) = 2x + 1$
Estos valores están en el conjunto de partida A		Estos valores están en el conjunto de llegada B

Notamos que se llega a establecer la siguiente regla de correspondencia: $f(x) = 2x + 1$. Asimismo, se observa que hay dos conjuntos:

a) El de partida $A = \{x \in R/x \geq 0\}$ contabiliza la cantidad de piñas que se compra.

b) El de llegada $B = \{y \in R/y \geq 1\}$ contabiliza el costo en soles.

En la expresión $y = f(x)$, a " x " se le denomina variable independiente, así como a " y ", variable dependiente.

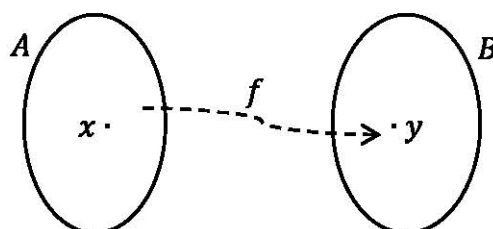
Aquí R representa al conjunto de los números reales.

En seguida veamos algunos ejemplos basados en esta *idea general* de función.

Ejemplo 1. Sea el conjunto A formado por los estudiantes del primer año de la Escuela Profesional de Ingeniería Ambiental de la UNJBG de Tacna, B el conjunto de los números naturales y f la regla de correspondencia entre los elementos x del conjunto A y los elementos y del conjunto B , lo que establece "la edad cumplida en años". En síntesis, se puede decir que el alumno x tiene "la edad cumplida" de y años.

Vemos que la regla de correspondencia f relaciona cada estudiante del conjunto A con una única edad cumplida en el conjunto B .

En este ejemplo, el hecho de que cada estudiante tenga una única edad cumplida caracteriza también el concepto de función real.

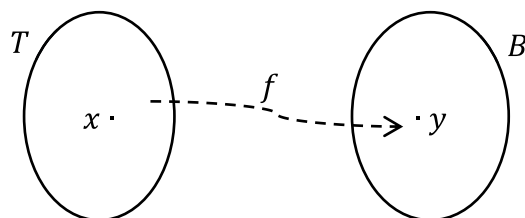


El alumno x tiene "la edad cumplida" de y años.

Ejemplo 2. Sea T el conjunto de todos los triángulos, B el conjunto de todos los números reales positivos y f la regla de correspondencia entre los elementos x del conjunto T y los elementos y del conjunto B , que establece "el triángulo ... tiene un área de ... centímetros cuadrados". En resumen, se puede afirmar que "el triángulo x tiene un área de y centímetros cuadrados".

Observamos que la regla de correspondencia f liga a cada triángulo del conjunto T , un único número positivo del conjunto B que representa su área.

También en este ejemplo, el hecho de que cada triángulo tenga un único valor como su área, caracteriza el concepto de función real.



El “triángulo x tiene un área de y centímetros cuadrados”.

Formalicemos a continuación, la idea de una función real de variable real mediante una definición.

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN REAL. La función real f de un conjunto A en un conjunto B es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento “ x ” del conjunto A exactamente un único elemento “ y ” en el conjunto B . Dicha regla de correspondencia se escribe de este modo: $y = f(x)$.

Equivalentemente, f es una función real de A en B si y solo si $(x; y) \in f \wedge (x; z) \in f \Rightarrow y = z$.

Esto implica que si existen dos valores “ y ” y “ z ” en el conjunto B como imágenes para un valor “ x ” del conjunto A , estos valores son iguales. Es decir que $y = z$.

OBSERVACIÓN 1.

a) Una función real f que va del conjunto A al conjunto B se denota entre otras formas como:

$$f : A \rightarrow B / y = f(x) \quad \text{o} \quad f = \{(x; y) / y = f(x)\} \quad \text{o} \quad y = f(x)$$

En cualquiera de las tres notaciones, se entiende como “ f es una función de A en B cuya regla de correspondencia es $y = f(x)$ ”.

b) Gráficamente, a una función real f se la reconoce cuando al trazar rectas verticales por toda la gráfica de f , esta es cortada como máximo en un punto. Si f es cortada en más de un punto, entonces no es una función real.

c) En adelante, los conjuntos A y B serán intervalos de números reales (gráficamente, intervalos de la recta numérica), salvo que se exprese otra condición.

Ejemplo 3. Se muestra ejemplos de reglas de correspondencia que generan conjuntos de pares ordenados que son o que no son funciones. Obedecen a la siguiente pregunta: ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son funciones reales?

a) $f = \{(x; y) / y = x^2 - 1\}$ b) $g = \{(x; y) / x^2 = y^2\}$ c) $h = \{(x; y) / x = 2y + 3\}$

Solución.

(a) El conjunto $f = \{(x; y) / y = x^2 - 1\}$ sí es una función real, su gráfica es una parábola.

Se cumple la condición f es una función real de $A = \mathbb{R}$ en $B = [-1; \infty)$ si y solo si $(x; y) \in f \wedge (x; z) \in f \Rightarrow y = z$. Es decir, para cada x existe un único y .

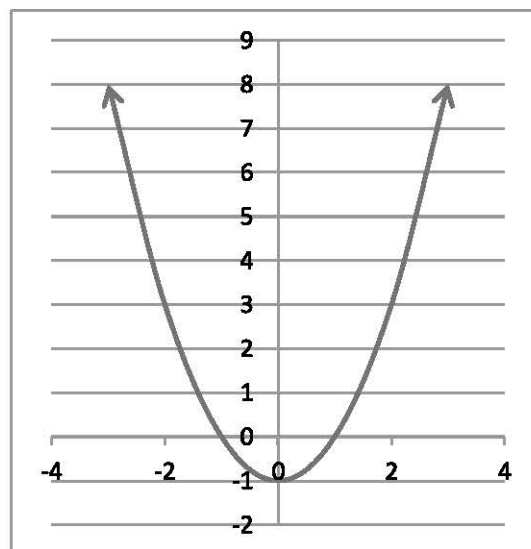


Figura 1.1

Así también se cumple que toda recta vertical cortaría a la gráfica de $y = x^2 - 1$ en un único punto. (Ver Figura 1.1).

(b) El conjunto $g = \{(x; y) / x^2 = y^2\}$ no es una función real, la gráfica está formada por dos rectas que se cruzan en el origen de coordenadas. (Ver Figura 1.2).

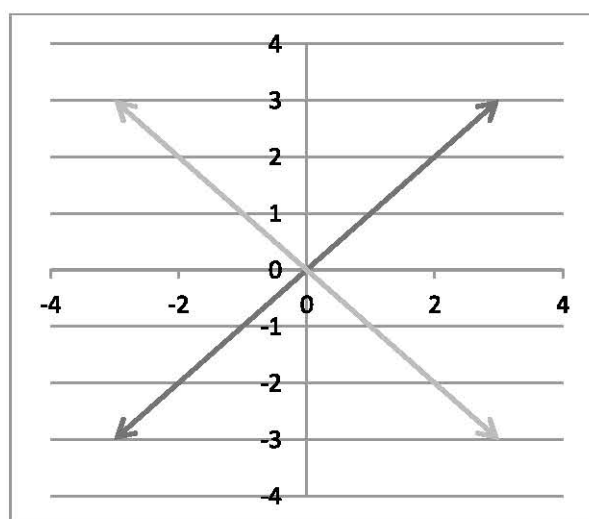


Figura 1.2

No se cumple la siguiente condición: g es una función real de $A = \mathbb{R}$ en $B = \mathbb{R}$ si y solo si $(x; y) \in g \wedge (x; z) \in g \Rightarrow y = z$; pues para cada " x ", existe dos valores de " y ". Por ejemplo, para $x = 2$, existe los valores de $y = 2$ y $y = -2$. Solo es único cuando $x = 0$.

Por otro lado, se cumple que rectas verticales cortarían a la gráfica de $x^2 = y^2$ en dos puntos.

Desde luego que al resolver $x^2 = y^2$ se obtiene las dos rectas: $x = y$, $x = -y$; lo cual garantiza los dos valores de y para cada x .

(c) El conjunto $h = \{(x; y) / x = 2y + 3\}$ si es una función real, la gráfica es una recta oblicua.

Se cumple esta condición: h es una función real de $A = \mathbb{R}$ en $B = \mathbb{R}$ si y solo si $(x; y) \in h \wedge (x; z) \in h \Rightarrow y = z$.

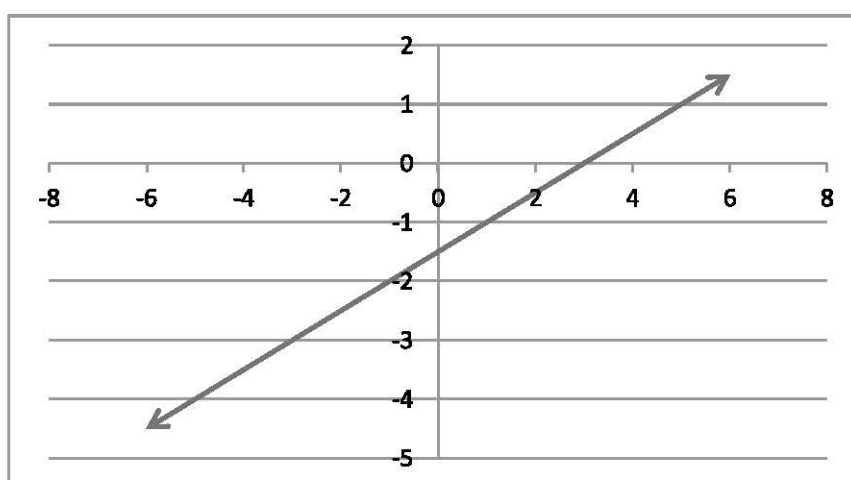


Figura 1.3

Se cumple que toda recta vertical cortarían a la gráfica de $x = 2y + 3$ en un único punto, tal como se verifica en la Figura 1.3.

Ejemplo 4. Muchas expresiones algebraicas o trascendentes pueden constituirse en reglas de correspondencia que son funciones reales, como se muestra a continuación:

- | | | |
|-------------------|-----------------------------------|-------------------------------|
| a) Polinomios: | (i) $f(x) = 3x - 7$ | (ii) $f(x) = 5x^2 - 4x + 8$ |
| | (iii) $f(x) = 4 - 2x + x^2 - x^3$ | |
| b) Raíces: | (i) $f(x) = \sqrt{x - 6}$ | (ii) $f(x) = \sqrt{x(4 - x)}$ |
| | (iii) $f(x) = \sqrt[3]{8 - 2x}$ | |
| c) Cocientes: | (i) $f(x) = \frac{x-7}{x+3}$ | (ii) $f(x) = \frac{2}{x^2-x}$ |
| | (iii) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ | |
| d) Exponenciales: | (i) $f(x) = e^x - x$ | (ii) $f(x) = e^{2x-1}$ |

$$(iii) f(x) = 2^x + 3$$

e) Trigonómicas: (i) $f(x) = \text{Sen}(2x)$

(ii) $f(x) = x^2 \text{Cos } x$

(iii) $f(x) = \text{Tan}(\text{Ln } x)$

f) Logaritmos: (i) $f(x) = \text{Ln}(9 - x^2)$

(ii) $f(x) = \text{Log}(2x - 3)$

(iii) $f(x) = \text{Ln}(\text{Cos } x)$

g) Valor absoluto: (i) $f(x) = |2x - 5|$

(ii) $f(x) = |x^2 - 4x + 6|$

(iii) $f(x) = |\text{Sen } x|$

Ejemplo 5. Funciones definidas por más de una regla de correspondencia.

a) $f(x) = \begin{cases} 5 - x; & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1; & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = |x| = \begin{cases} x; & \text{si } x \geq 0 \\ -x; & \text{si } x < 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x < 1 \\ 3, & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 2 - x, & \text{si } x > 4 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } x < 0 \\ \text{Sen } x, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ \text{Ln } x, & \text{si } x > \pi \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{Sen } x}{x}; & \text{si } x \neq 0 \\ 1; & \text{si } x = 0 \end{cases}$

OBSERVACIÓN 2. La forma que tendrá una función, según su regla de correspondencia, dependerá de lo que se quiera representar. En las aplicaciones se debe al hecho, suceso o magnitud que se quiera describir o representar.

Los dominios de las funciones anteriores se tienen que precisar de acuerdo a criterios de existencia de cada regla de correspondencia en mención.

Ejemplo 6. Sea la función real $f(x) = x^3 + x - 1$, hallar $f(-2)$, $f(3)$, $f(-x)$ y $f(a - 1)$.

Solución.

Este proceso se conoce como *evaluación de una función* en algún valor real de su dominio.

Se sustituye x por -2 en la función dada, así $f(-2) = (-2)^3 + (-2) - 1 = -11$. Es decir, $f(-2) = -11$.

Luego se sustituye x por 3 en la función, resultando $f(3) = 29$.

También x por $-x$ en la función, dando por resultado $f(-x) = -x^3 - x - 1$.

Finalmente x por $a - 1$ en la función, con lo cual queda $f(a - 1) = ?$ Hacerlo como ejercicio.

Ejemplo 7. Dada la función real $g(x) = x^2 - 2x + 3$

a) Hallar las raíces de la ecuación $g(x) = g(-1)$.

b) Hallar los ceros de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

Solución.

(a) Esta igualdad solicitada genera la siguiente ecuación cuadrática: $g(x) = g(-1)$, así

$$x^2 - 2x + 3 = 6 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0.$$

El conjunto solución es $CS = \{-1; 3\}$.

(b) Los ceros de la función $y = f(x)$ se encuentran igualando a cero dicha función, así los ceros de la función se obtienen de $f(x) = 0$.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0. \text{ El conjunto solución es } CS = \{2; 3\}.$$

Los ceros de una función real son los valores de la variable independiente x en los cuales, la gráfica de la función corta al eje X. (Ver Figura 1.4).

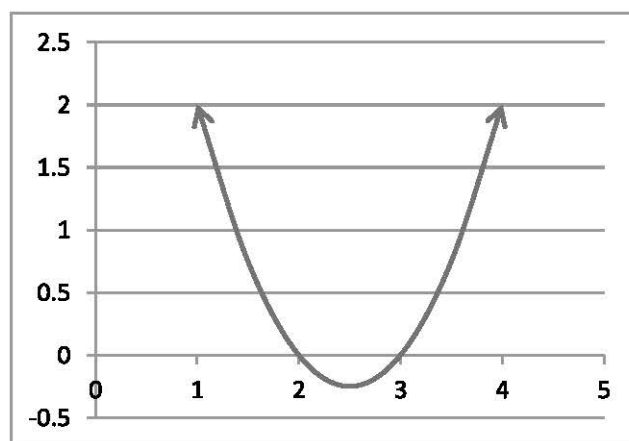


Figura 1.4

Ejemplo 8. Muchas fórmulas conocidas se pueden expresar como funciones reales.

a) Área de un círculo de radio r será $A(r) = \pi r^2$

b) Área de un cuadrado de lado x será $A(x) = x^2$

c) Área de un triángulo de base fija B y altura variable h será $A(h) = \frac{1}{2} Bh$

d) Espacio recorrido para una velocidad fija V y tiempo t variable $E(t) = Vt$

e) Presión para un área fija A y una fuerza variable F , será $P(F) = \frac{F}{A}$

f) Capitalización continua para un capital inicial P , un interés fijo r y tiempo t variable:
 $C(t) = Pe^{rt}$

g) Índice de masa corporal para una talla fija T y un peso variable p : $I(p) = \frac{p}{T^2}$

h) Superficie corporal de talla fija T y peso variable p será

$$S(p) = \sqrt{\frac{Tp}{36000}}$$

DOMINIO, IMAGEN Y GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN REAL.

Una función real de variable real o simplemente función real f posee cuatro elementos:

- i) La regla de correspondencia $y = f(x)$
- ii) El dominio $Dom(f)$
- iii) La imagen $Im(f)$
- iv) La gráfica $Gra(f)$.

Obsérvese el diagrama en la Figura 1.5.

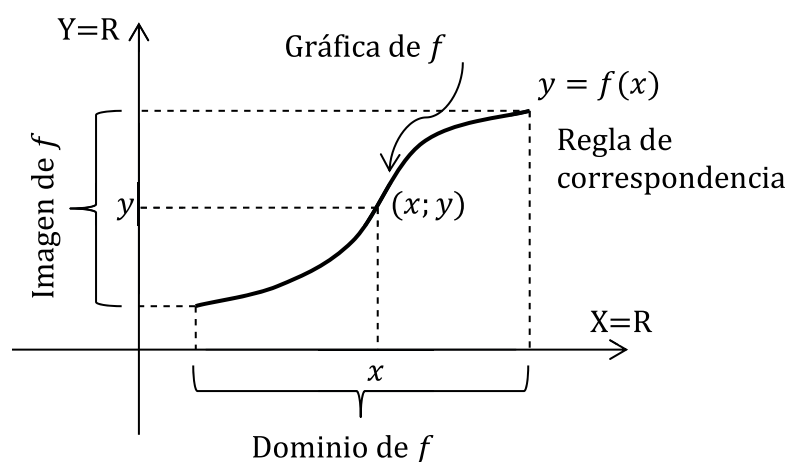


Figura 1.5

EL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN REAL. El **dominio** de una función real $f: R \rightarrow R$, que se denota como $Dom(f)$, es el conjunto de valores “ x ” del conjunto de partida R para los cuales existe un único valor “ y ” en el conjunto de llegada R , por lo que cumplen con la regla de correspondencia $y = f(x)$.

Simbólicamente se escribe así: $Dom(f) = \{x \in R / \exists! y \in R \wedge y = f(x)\} \subseteq R$.

Aquí, R representa todo el conjunto de los números reales.

OBSERVACIÓN 3. Teóricamente, una función real f tiene como *dominio* todo el conjunto de números reales R ; este se reduce a un intervalo $A = Dom(f)$ cuando se ha restringido a dicho intervalo, o cuando es el resultado de hallar el dominio teórico de dicha función.

OBSERVACIÓN 4. Determinar el dominio teórico de una función real dependerá de la regla de correspondencia $y = f(x)$:

- i) Cuando en la regla de correspondencia aparecen cocientes como $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$, la condición de restricción es que el denominador $D(x)$ sea diferente de cero, es decir, $D(x) \neq 0$.

ii) Cuando en la regla de correspondencia aparecen raíces de índice par como $f(x) = \sqrt[n]{S(x)}$, con $n \in \mathbb{N}$ la condición de restricción es que la cantidad sub-radical $S(x)$ sea mayor o igual que cero, esto es $S(x) \geq 0$.

iii) Cuando en la regla de correspondencia aparecen funciones logarítmicas como $f(x) = \log_a S(x)$, o $f(x) = \ln S(x)$, la condición de restricción es que el argumento del logaritmo $S(x)$ sea mayor que cero, es decir, $S(x) > 0$.

iv) Cuando en una regla de correspondencia aparecen de forma combinada dos o más de los casos descritos, se aplica cuidadosamente dichas restricciones.

Nota. En muchos casos la función real f se muestra acompañada de su dominio.

LA IMAGEN DE UNA FUNCIÓN REAL. La imagen de una función real $f: R \rightarrow R$, que se denota por $Im(f)$, es el conjunto de valores “ y ” del conjunto de llegada R para los cuales existe un valor “ x ” en el conjunto de partida R , por tanto, cumplen con la regla de correspondencia $y = f(x)$.

Simbólicamente, se escribe de la siguiente forma: $Im(f) = \{y \in R / \exists x \in R \wedge y = f(x)\} \subseteq R$.

Nota. La *imagen* se determina despejando la variable “ x ” y determinando el recorrido de la variable “ y ”.

OBSERVACIÓN 5. Teóricamente, una función real f tiene como *imagen* todo el conjunto de números reales R ; se reduce a un intervalo $B = Im(f)$ cuando es el resultado de hallar la imagen de dicha función correspondiente al dominio de la función $Dom(f)$.

OBSERVACIÓN 6. En muchos casos, para determinar la *imagen* de una función real es necesario construir la regla de correspondencia $y = f(x)$ a partir de los valores “ x ” del dominio de la función, usando las propiedades de los números reales.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN REAL. Sea $f: R \rightarrow R$ una función real de variable real, entonces definimos la gráfica de la función f como el conjunto de pares ordenados $(x; y)$ que satisfacen la regla de correspondencia dada $y = f(x)$.

Simbólicamente, se escribe así: $Gra(f) = \{(x; y) \in R^2 / y = f(x)\}$

OBSERVACIÓN 7. La gráfica generalmente es una *curva* en el plano cartesiano que se obtiene al construir una tabla de pares ordenados (tabulación), luego ubicarlos en un sistema de coordenadas o plano cartesiano y después suavizarlos mediante una curva que pase por todos ellos.

En adelante, las gráficas se realizarán a través de este proceso. Es preciso indicar que en algunas gráficas se puede usar escalas diferentes para el dominio o para la imagen.

OBSERVACIÓN 8. El dominio y la imagen de una función real se pueden obtener a partir de la gráfica de dicha función del siguiente modo:

- i) El Dominio $Dom(f)$ de una función real f puede obtenerse como la proyección ortogonal de la gráfica de la función real $Gra(f)$ sobre el eje real de partida, X. Eje horizontal.
- ii) La imagen $Im(f)$ de una función real f se puede obtener como la proyección ortogonal de la gráfica de la función real $Gra(f)$ sobre el eje real de llegada, Y. Eje vertical.

Ejemplo 9. Determinar el dominio, la imagen y la gráfica de las siguientes funciones reales:

a) $f(x) = 2 + \frac{x}{2}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

c) $g(x) = \sqrt{6-2x}$

d) $y = \frac{x}{x^3-4x}$

e) $F(t) = \sqrt{9-t^2}$

Solución.

El dominio y la imagen tienen que ser obtenidos desde la regla de correspondencia.

- a) En la Figura 1.6, se grafica la función $f(x) = 2 + \frac{x}{2}$.

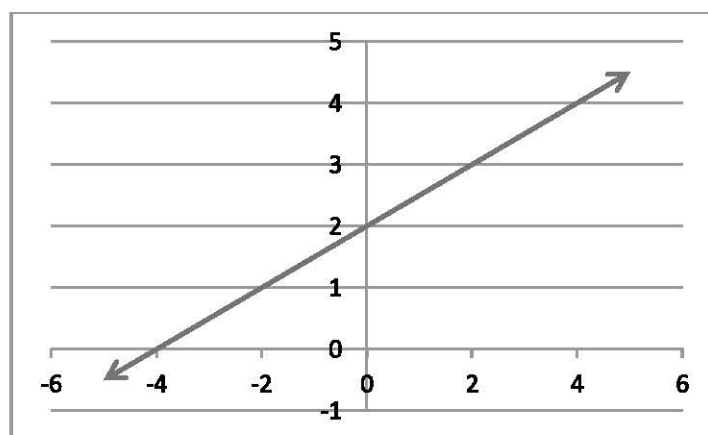


Figura 1.6

Observamos que esta función no tiene restricciones dado que la variable x puede ser sustituida por cualquier valor real y siempre se obtendrá un valor real para la variable y . Entonces $Dom(f) = \mathbb{R}$.

La imagen se obtiene al determinar el recorrido de $x = 2(y - 2)$ donde y puede ser sustituido por cualquier valor real y el valor de x siempre existe, es decir, $Im(f) = \mathbb{R}$.

- (b) En la Figura 1.7, se grafica la función $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

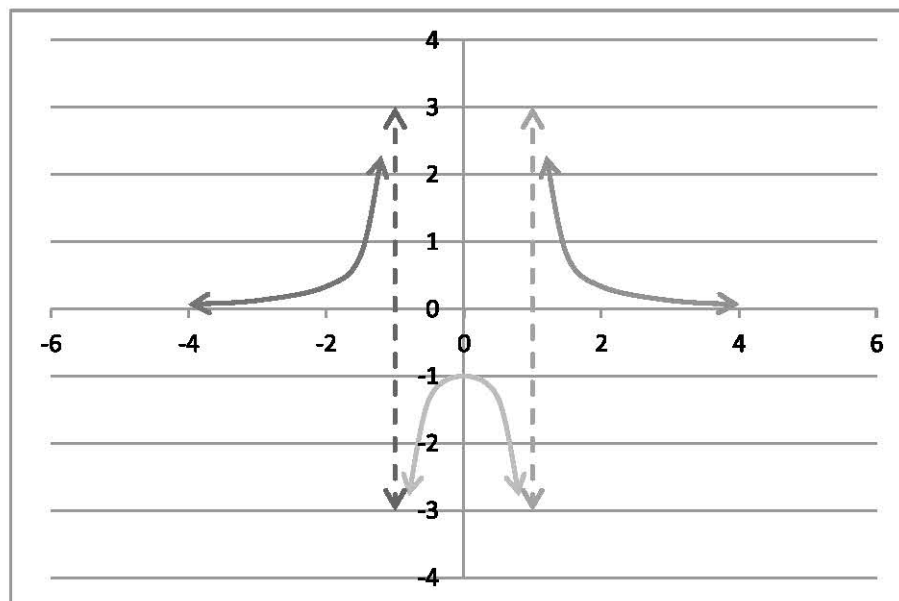


Figura 1.7

Cuando existe un cociente, el dominio se encuentra aplicando la *condición* “denominador diferente de cero”, es decir, $x^2 - 1 \neq 0$, en donde al resolver la desigualdad, se obtiene que el dominio es el intervalo $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$. (Ver nuevamente Figura 1.7).

Las rectas $x = -1$ y $x = 1$ se denominan asíntotas verticales.

Para la imagen se despeja $x = \pm \sqrt{\frac{y+1}{y}}$ y se aplica la condición $\frac{y+1}{y} \geq 0$ por ser raíz de índice par; en donde, tras resolver la inecuación, la imagen será la unión de dos intervalos: $Im(f) = < -\infty; -1] \cup (0; +\infty)$.

La recta $y = 0$ se denomina asíntota horizontal.

(c) En la Figura 1.8, se grafica la función $g(x) = \sqrt{6 - 2x}$.

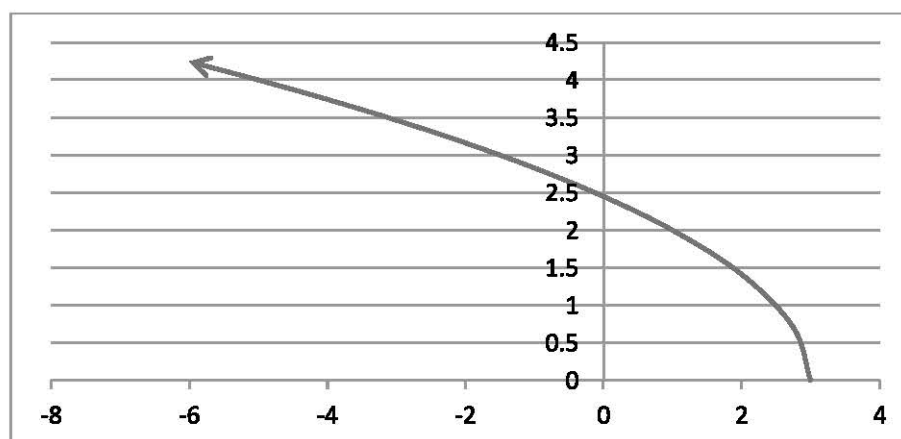


Figura 1.8

En este caso, cuando hay una raíz cuadrada, el dominio se encuentra aplicando la *condición* de restricción $6 - 2x \geq 0$; en donde resolviendo la inecuación, el dominio será el intervalo $Dom(g) = \{-\infty; 3\}$.

La imagen se obtiene por construcción de la regla de correspondencia a partir del dominio y usando las propiedades de los números reales.

Partimos del siguiente dominio: $x \in \{-\infty; 3\}$

Reescribimos: $-\infty < x \leq 3$

Multiplicamos por dos: $-\infty < 2x \leq 6$

Cambiamos de signo: $\infty > -2x \geq -6$

Sumamos seis: $\infty > 6 - 2x \geq 0$

Ordenamos de menor a mayor: $0 \leq 6 - 2x < \infty$

Extraemos raíz cuadrada: $0 \leq \sqrt{6 - 2x} < \infty$

Finalmente, $0 \leq y < \infty$ o $y \in [0; +\infty)$

Es decir, la imagen será el intervalo $Im(f) = [0; +\infty)$

(d) $y = \frac{x}{x^3 - 4x}$. El dominio y la imagen son, respectivamente, $Dom(y) = \mathbb{R} - \{-2; 0; 2\}$, $Im(y) = \langle -\infty; -1/4 \rangle \cup \langle 0; +\infty \rangle$ ¡Verificar estas respuestas!

(e) $F(t) = \sqrt{16 - t^2}$. El dominio y la imagen son respectivamente: $Dom(F) = [-4; 4]$, $Im(F) = [0; 4]$ ¡Verificar estas respuestas!

1.2. CLASES DE FUNCIONES REALES. FUNCIONES ELEMENTALES

Una primera forma de clasificar a las funciones reales es mediante reglas de correspondencia, las cuales son expresiones elementales conocidas.

Aquí se presenta las funciones acompañadas tanto de su dominio como de su imagen y se proyectarán sus gráficas.

LA FUNCIÓN CONSTANTE.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = C$ $y = C$	$Dom(f) = \mathbb{R}$	$Im(f) = \{C\}$	$Gra(f) =$ Recta horizontal paralela al eje real X.

Ejemplo 1. En la Figura 1.9, se grafica la función constante $f(x) = 2$, aquí $C = 2$.

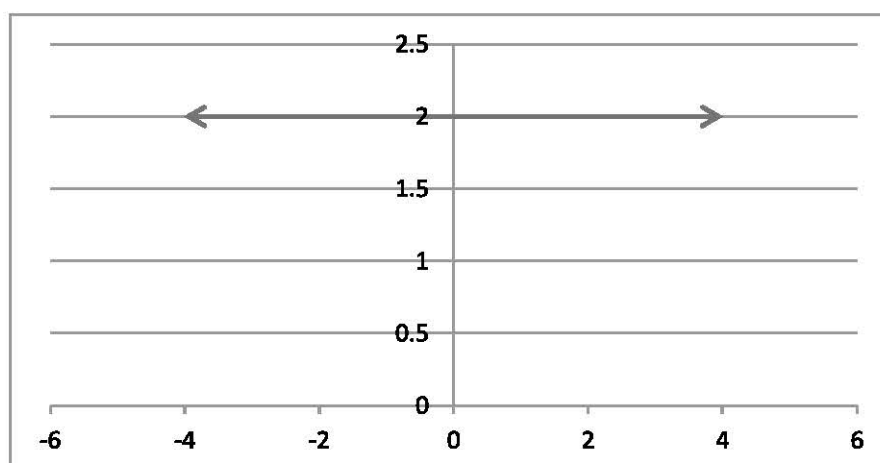


Figura 1.9

Ejercicio 1. Grafique las funciones reales a) $G(x) = -2$ b) $D(x) = \pi$.

Ejemplo 2. (PROBLEMA) Un frigorífico tiene capacidad para 1000 kg de carne y por cada kg se paga 0,35 céntimos. Los días sábados siempre se vende toda la capacidad instalada de refrigeración. ¿Cuánto se recibe por el uso del frigorífico los días sábados si el pago tiene que hacerse se haga o no uso del frigorífico?

Solución.

Ingreso = (Nº de kilos) x (precio de cada kg) = (1000) x (0,35) = 350 nuevos soles.

La función constante será $f(x) = 0,35$, $Dom(f) = [0; 1000]$, $Im(f) = \{0,35\}$

Los días sábados se recibe 350 nuevos soles.

LA FUNCIÓN IDENTIDAD.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = x$ $y = x$	$Dom(f) = \mathbb{R}$	$Im(f) = \mathbb{R}$	$Gra(f)$ es una recta que biseca al primer y tercer cuadrante.

Ejemplo 3. Realizar la gráfica de la función identidad.

Solución. Coincide con la gráfica de la recta $y = x$. Se muestra la gráfica de $f(x) = x$. (Ver Figura 1.10).

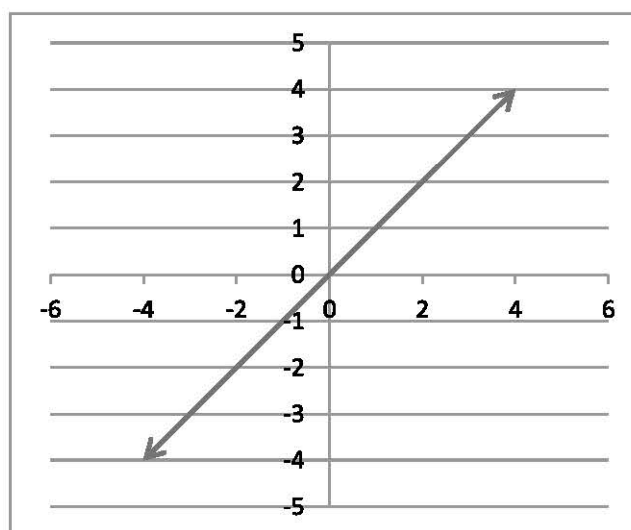


Figura 1.10

LA FUNCIÓN LINEAL O POLINÓMICA DE GRADO UNO .

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = mx + b$ $y = mx + b$	$Dom(f) = \mathbb{R}$	$Im(f) = \mathbb{R}$	$Gra(f)$ es una recta no vertical.

Cuando $b = 0$, la recta pasa por el origen de coordenadas, esto es por $(0; 0)$ y cuando $b \neq 0$, no pasa por el origen de coordenadas.

Nota. La constante m se denomina pendiente de la recta y mide su grado de inclinación. Cuando $m > 0$, la recta se inclina hacia la derecha; cuando $m < 0$, la recta se inclina hacia la izquierda.

Ejemplo 4. Realizar la gráfica de las funciones lineales a continuación:

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $g(x) = -5x/2$

Solución.

a) La gráfica de la función $f(x) = 2x - 3$ es una recta que no pasa por el origen de coordenadas. Como $m = 2 > 0$, la recta se inclina hacia la derecha. (Ver Figura 1.11).

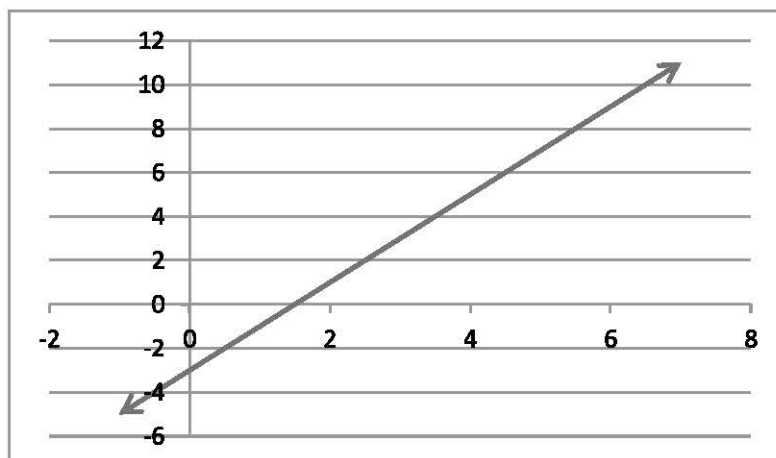


Figura 1.11

b) La gráfica de la función $g(x) = -\frac{5x}{2}$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Como $m = \frac{-5}{2} < 0$, la recta se inclina hacia la izquierda. Tal como se muestra en la Figura 1.12.

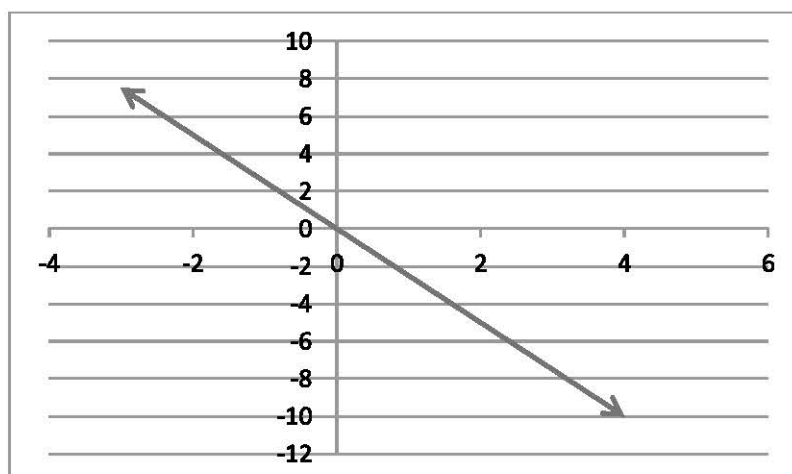


Figura 1.12

Ejemplo 5. (PROBLEMA) Un fabricante de patines estima sus costos de producción mediante la función real $C(x) = 300 + 40x$, donde “ x ” es el número de unidades producidas. Graficar la función de costos para $0 \leq x \leq 200$ y calcular el costo para $x = 0$, $x = 40$, $x = 90$ y $x = 150$. Interprete para cada caso y señale el costo en dólares.

Solución.

El valor $C(0) = 300$ significa que el costo fijo de la empresa es de 300 dólares.

El valor $C(40) = 1900$ significa que el costo de producción por 40 pares de patines es de 1 900 dólares.

De forma similar se interpreta otros casos para nuevas unidades de producción.

Nota. El valor 40 en la ecuación de costos, que es la pendiente de la recta, representa el “incremento variable del costo” por cada unidad de aumento en la producción.

En la Figura 1.13, se ubicaron los puntos $(0; 300)$ y $(200; 8\,300)$, mostrándose una recta.

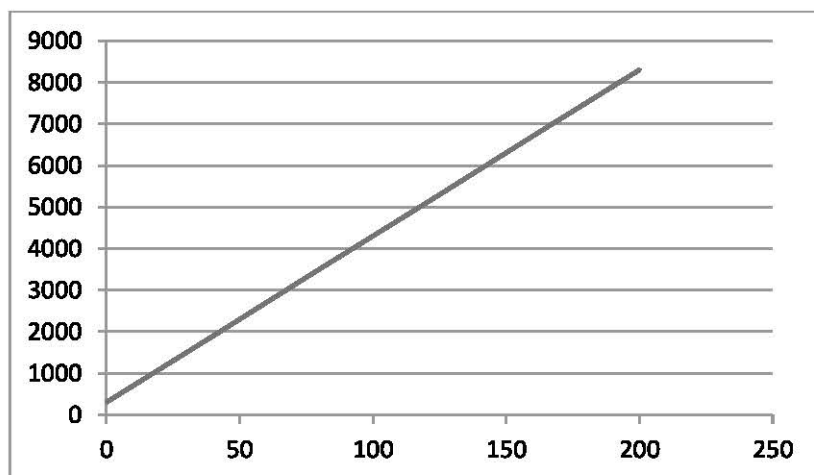


Figura 1.13

En este problema se da como intervalo dominio a $Dom(f) = [0; 200]$; le corresponde el intervalo imagen $Im(f) = [300; 8300]$.

OBSERVACIÓN 1. Con respecto a *dominios* se puede observar hasta aquí, dos aspectos:

- a) Cuando el dominio se obtiene de la regla de correspondencia y de la definición de dominio, es un *dominio teórico*.
- b) Cuando el dominio es sujeto a condiciones de un problema particular, se trata de un *dominio lógico* que tiene sentido con la naturaleza del problema y sus restricciones pertinentes.

LA LÍNEA RECTA. LA PENDIENTE. ECUACIONES DE LA RECTA

ECUACIONES LINEALES Y GRÁFICAS.

Se puede distinguir los dos siguientes *problemas* básicos:

- i) Dada una ecuación lineal $E(x; y) = 0$, puede dibujarse su gráfica.
- ii) Dada cierta información respecto a una línea recta en un sistema de coordenadas, es factible encontrar su ecuación de dos variables $E(x; y) = 0$.

Una *solución* de una ecuación lineal de dos variables se entiende como el par ordenado $(x; y)$ de números reales que satisfacen dicha ecuación.

El conjunto solución de una ecuación lineal de dos variables es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación.

Ejemplo 6. El par ordenado $(0; -3)$ es una solución de la ecuación lineal $3x - 4y = 12$. Encuentre dos “puntos solución” más.

Graficando la ecuación dada en el ejemplo, se obtiene:

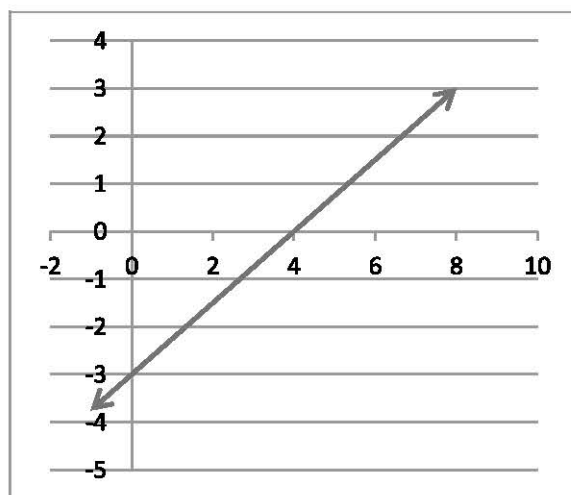


Figura 1.14

Otros puntos se consiguen de dar valores a y o a x , así como de obtener los valores de la otra variable en la ecuación $3x - 4y = 12$. Dichos puntos son $(0; -3)$, $(4; 0)$, $(8; 3)$.

OBSERVACIÓN 2.

- i) Cuando se dice que se construye la gráfica de una ecuación de dos variables, se quiere señalar que se traza la gráfica de su conjunto solución en un sistema de coordenadas rectangulares, el plano cartesiano.
- ii) A la ecuación lineal $Ax + By = C$ se le conoce como la forma estándar de la ecuación de la recta.
- iii) La gráfica de cualquier ecuación de la forma $Ax + By = C$, donde A y B son constantes (no ambas cero) es una línea recta.
- iv) Para realizar la gráfica de una recta es suficiente identificar dos puntos de ella.
- v) Al despejar la variable y se obtiene una función lineal de la forma $y = mx + b$ o $f(x) = mx + b$.

Ejemplo 7. Construya la gráfica de las siguientes ecuaciones:

a) $3x + 4y = 12$

b) $y = 2x - 1$

c) $y = \frac{x}{2} + 2$, con $-8 \leq x \leq 10$.

Solución. Tabúlese un par de puntos para cada caso por donde pasará la recta.

a) Graficando la recta $3x + 4y = 12$., se concluye que esta es ilimitada. (Ver Figura 1.15)

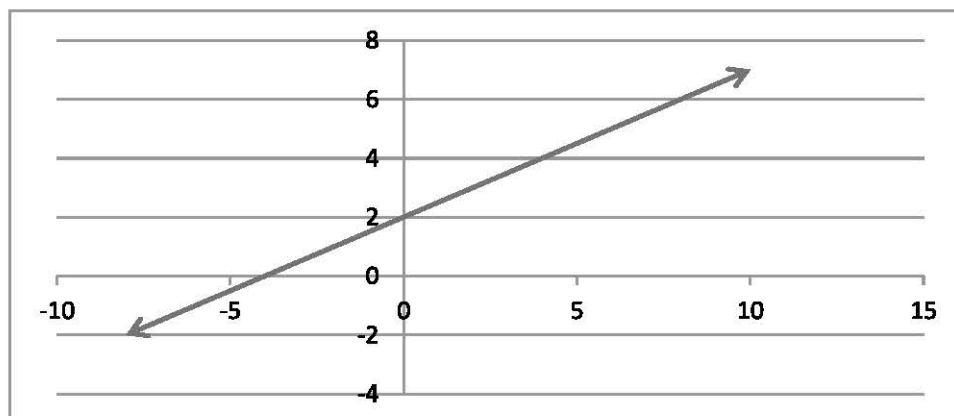


Figura 1.15

b) Graficando la recta $y = 2x - 1$. Esta es ilimitada, a fin de verificarlo véase la Figura 1.16.

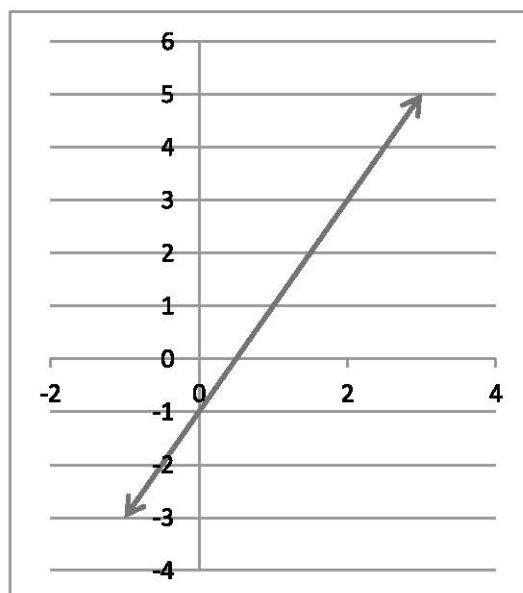
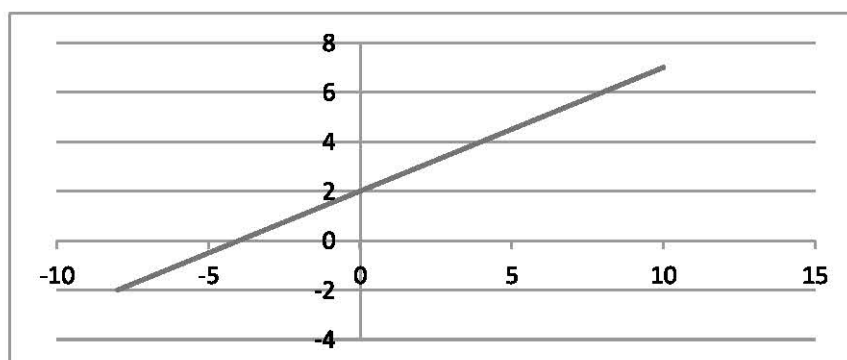


Figura 1.16

c) Graficando la recta $y = \frac{x}{2} + 2$, con $-8 \leq x \leq 10$, es limitada al intervalo dado. (Ver Figura 1.17).



PENDIENTE DE UNA RECTA. Es de gran utilidad tener la medida numérica de la inclinación de una recta. Para este propósito se utiliza el concepto de **pendiente** de una recta, a la cual se denota por “ m ”.

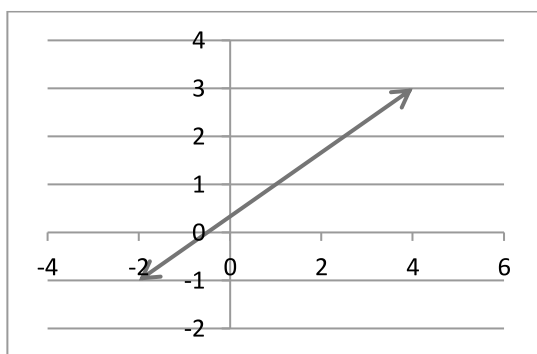
La pendiente “ m ” de una recta que pasa por los puntos $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$ se obtiene de la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, con $x_1 \neq x_2$.

OBSERVACIÓN 3. La pendiente de una recta vertical no está definida. En general, siendo “ m ” la pendiente de una recta, se cumple lo siguiente:

Si la pendiente $m > 0$, la recta se inclina hacia la derecha. Figura 1.18.

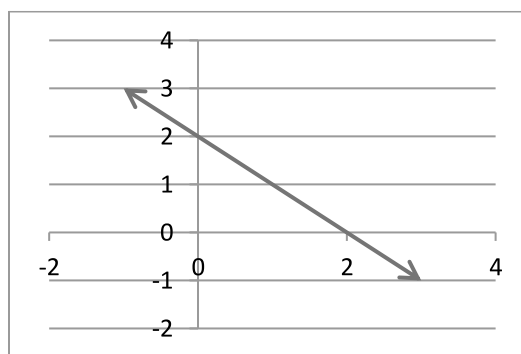
Si la pendiente $m < 0$, la recta se inclina hacia la izquierda. Figura 1.19.

Si la pendiente $m = 0$, la recta es horizontal (función constante). Figura 1.20.



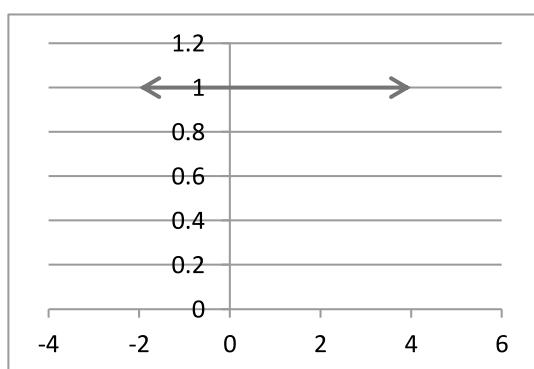
Pendiente positiva: $m > 0$

Figura 1.18



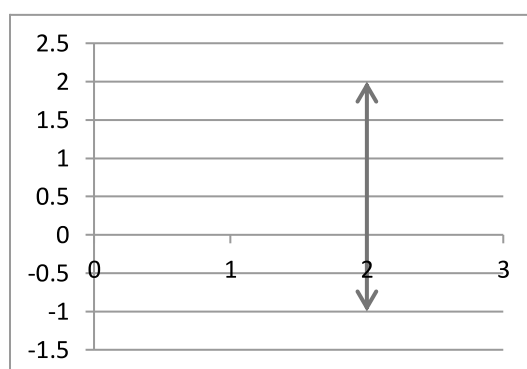
Pendiente negativa: $m < 0$

Figura 1.19



Pendiente cero: $m = 0$

Figura 1.20



Pendiente no existe o $m = \infty$

Figura 1.21

Nota. Cuando la recta es dada en su forma estándar $Ax + By = C$, su pendiente se da mediante $m = -\frac{A}{B}$.

Ejemplo 8. Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2; 5)$ y $(4; -7)$. Realice una gráfica.

Solución. En la Figura 1.22, se grafica la recta que pasa por los dos puntos dados.

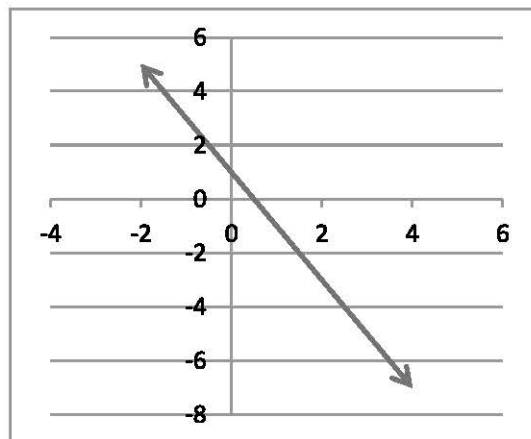


Figura 1.22

La pendiente $m = -2$. Se llega a dicha respuesta al realizar $(x_1; y_1) = (-2, 5)$ y $(x_2; y_2) = (4; -7)$ y aplicar $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-7 - 5}{4 - (-2)} = \frac{-12}{6} = -2$.

Ejemplo 9. ¿Qué pendiente tendrá la recta cuya ecuación es $2x - 3y = 6$?

Solución.

Comparando la recta $2x - 3y = 6$ con la forma estándar $Ax + By = C$, resulta la pendiente $m = -\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$. A continuación, se muestra en la Figura 1.23 la gráfica que le corresponde.

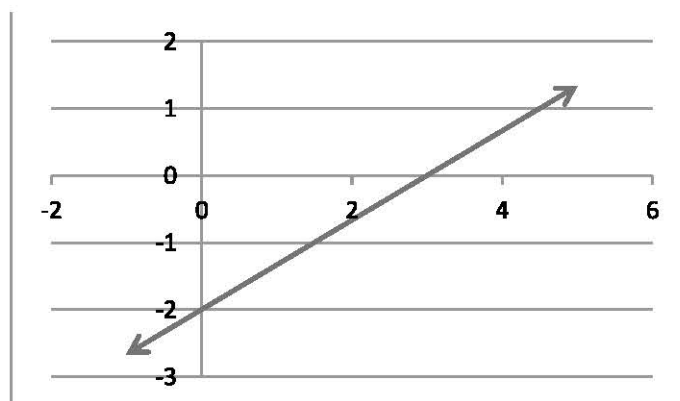


Figura 1.23

ECUACIONES DE LA RECTA. Son cuatro casos y todos se pueden reducir a la forma estándar $Ax + By = C$. También se la puede escribir como función en la forma $y = mx + b$.

i) Cuando se conoce dos puntos de la recta $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$, la ecuación es obtenida de $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

ii) Cuando se conoce un punto de la recta $(x_1; y_1)$ y su pendiente " m ", la ecuación se obtiene de $y - y_1 = m(x - x_1)$.

iii) Cuando se conoce la pendiente de la recta " m " y la ordenada en el origen " b ", su fórmula es $y = mx + b$.

iv) Cuando se conocen los cortes " a " y " b " que realiza la recta en los ejes coordenados X e Y, respectivamente, es dada a través de $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Ejemplo 10. Determine la ecuación de la recta que se pide y haga su gráfica en el plano cartesiano.

a) Recta que pasa por los dos puntos $(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3})$ y $(3; \frac{5}{3})$.

b) Recta que pasa por el $(6; -6)$ y cuya pendiente es $m = \frac{1}{3}$.

c) Recta que tiene pendiente $m = 2$ y su ordenada en el origen es $b = -\frac{3}{2}$.

d) Recta que corte al eje X en 4, y al eje Y en -5.

Solución.

Use la fórmula adecuada para cada caso.

(a) Reemplazamos los puntos $(x_1; y_1) = (-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3})$ y $(x_2; y_2) = (3; \frac{5}{3})$ para el primer caso en $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.

Luego se tiene la ecuación de la recta en forma estándar: $42x - 81y - 26 = 0$. (Ver Figura 1.24).

En forma de función queda expresada como sigue: $y = \frac{42x - 26}{81}$

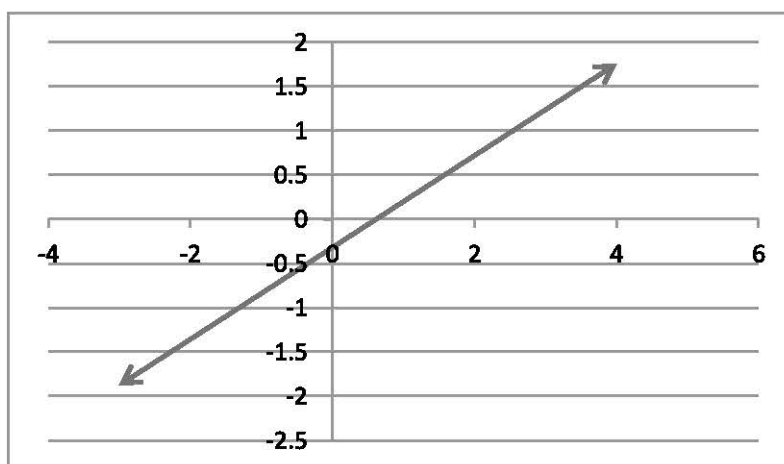


Figura 1.24

(b) Reemplazamos el punto $(x_1; y_1) = (6; -6)$ y la pendiente $m = \frac{1}{3}$ para el segundo caso en $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Luego se tiene la ecuación de la recta en su forma estándar: $x - 3y - 24 = 0$. (Ver Figura 1.25).

En forma de función queda expresada así: $y = \frac{x-24}{3}$

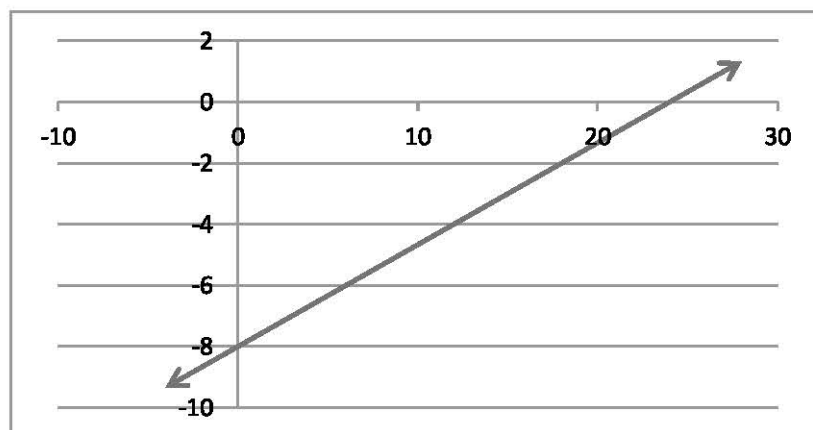


Figura 1.25

(c) Reemplazando la pendiente $m = 2$ y la ordenada en el origen es $b = -\frac{3}{2}$ para el tercer caso en $y = mx + b$.

Después se tiene la ecuación de la recta en su forma estándar: $2x - y - \frac{3}{2} = 0$. (Ver Figura 1.26)

En forma de función queda expresada de la siguiente manera: $y = 2x - \frac{3}{2}$

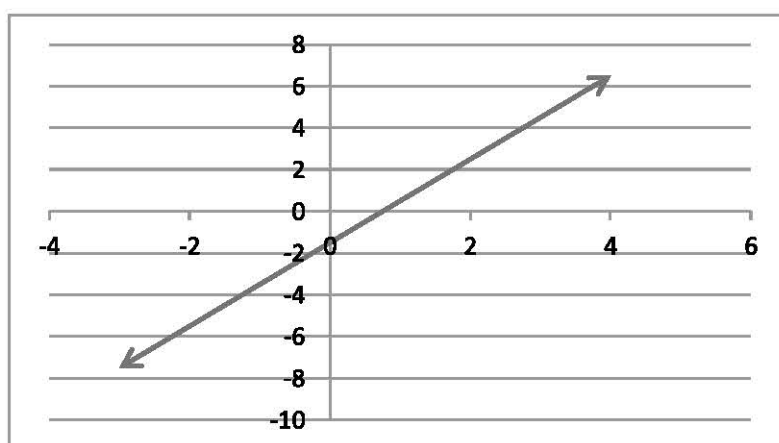


Figura 1.26

(d) Reemplazando $a = 4$, y $b = -5$ para el cuarto caso en $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; se llega a la ecuación de la recta en su forma estándar: $5x - 4y - 20 = 0$. (Ver Figura 1.27).

En forma de función queda expresada por $y = \frac{5x-20}{4}$.

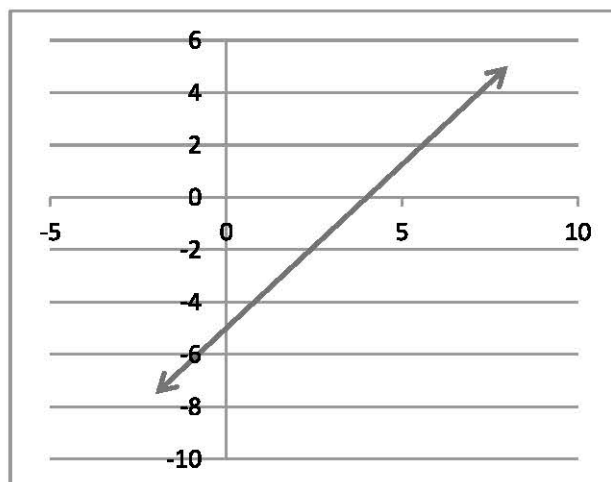


Figura 1.27

Ejemplo 11. (PROBLEMA) La gerencia de una empresa que fabrica patines tiene costos fijos (costo a cero salidas) de \$300 diarios y costos totales de \$4 300, cuando hay una salida de 100 pares de patines por día. Suponga que el costo C está linealmente relacionado con la salida.

- Determine la pendiente de la recta que une los puntos asociados con las salidas.
- Encuentre la ecuación de la recta que relaciona la salida con el costo. Escriba la respuesta final en la forma $y = mx + b$.
- Construya la gráfica de la ecuación del costo tomado de la parte (b) para el intervalo $[0; 200]$. Use una escala apropiada.

Solución.

(a) Para $x = 0$ salidas, el costo es \$300 y para $x = 100$ salidas el costo es \$4 300; es decir, la recta pasa por los puntos $(0; 300)$ y $(100; 4\,300)$, entonces la pendiente de la recta es dada por $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4300 - 300}{100 - 0} = 40$.

La pendiente $m = 40$ obtenida de la recta representa el incremento en el costo total por cada unidad adicional producida y se conoce como costo marginal.

(b) Se debe encontrar la ecuación de la recta que pase por el punto $(0; 300)$, cuya pendiente es $m = 40$; entonces, $y - y_1 = m(x - x_1) \rightarrow y - 300 = 40(x - 0)$. Donde la función será $y = 40x + 300$.

(c) La gráfica se realiza usando los puntos extremos $P = (0; 300)$ y $Q = (200; 8\,300)$ (Ver Figura 1.28).

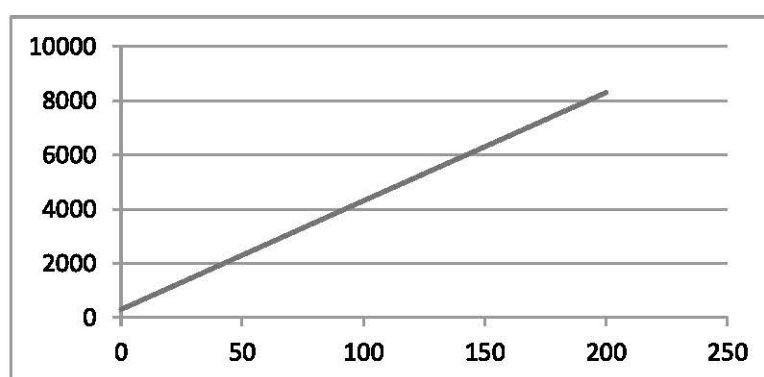


Figura 1.28

Ejemplo 12. (PROBLEMA) En un experimento de nutrición, un biólogo desea preparar una dieta especial para animales de laboratorio. Dispone de dos mezclas de alimentos, A y B. Si la mezcla A contiene 20% de proteína y la mezcla B, 10% de proteína ¿qué combinaciones de cada mezcla proporcionarán exactamente 20 gramos de proteína? Con “ x ” se representa la cantidad que se usa de A y con “ y ” la que se usa de B. Después, escriba la ecuación lineal que relaciona “ x ”, “ y ” y 20. Construya la gráfica de esta ecuación para $x \geq 0$, $y \geq 0$. Elija un par de puntos de la gráfica e interprete en el contexto del problema.

Solución. La función será $y = 200 - 2x$.

En efecto, siendo x la cantidad de mezcla A así como y la cantidad de mezcla B; y según los datos $\frac{20}{100}x + \frac{10}{100}y = 20 \rightarrow \frac{2}{10}x + \frac{1}{10}y = 20 \rightarrow 2x + y = 200$. (Ver Figura 1.29).

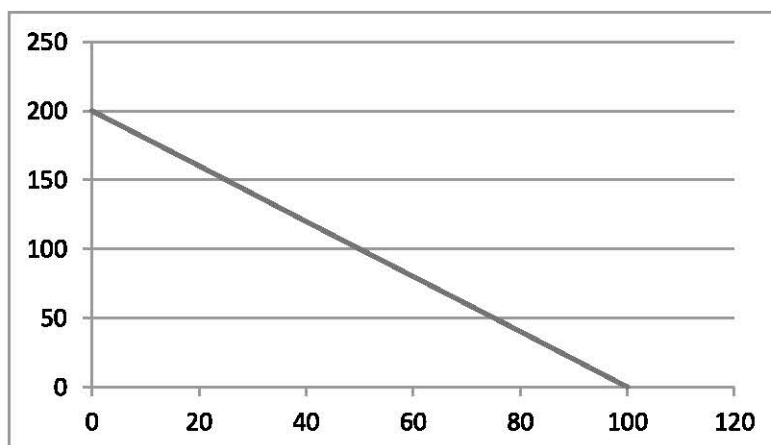


Figura 1.29

FUNCIÓN CUADRÁTICA O POLINÓMICA DE GRADO DOS.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = ax^2 + bx + c$ $y = ax^2 + bx + c$ Con $a \neq 0$	$Dom(f) = \mathbb{R}$	$Im(f) = [k; +\infty)$, si $a > 0$ $Im(f) = (-\infty; k]$, si $a < 0$	$Gra(f)$ es una parábola.

OBSERVACIÓN. Una función cuadrática siempre puede escribirse en la forma siguiente: $f(x) = a(x - h)^2 + k$, donde el punto $V = V(h; k)$ es el vértice de la parábola. Además:

Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba, el vértice V es el punto mínimo de f y la imagen es el intervalo $Im(f) = [k; +\infty)$.

Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo, el vértice V es el punto máximo de f y la imagen es el intervalo $Im(f) = (-\infty; k]$.

Ambas se muestran en la gráfica a continuación:

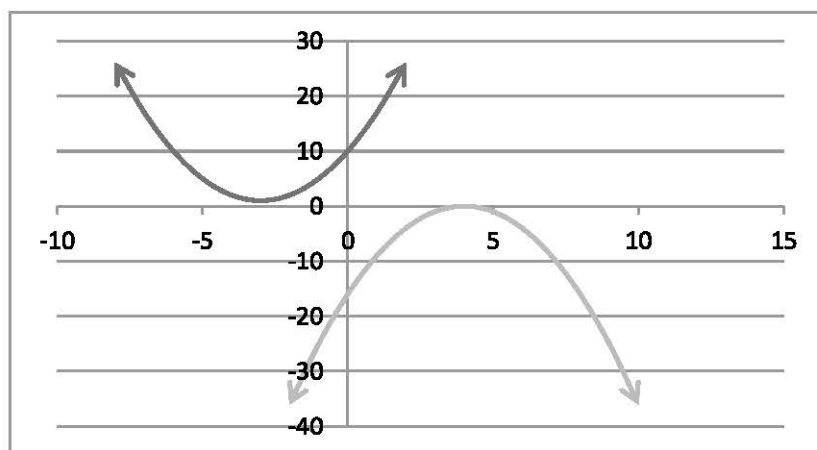


Figura 1.30

Ejemplo 13. Graficar la ecuación cuadrática $y = 2x^2 - 4x$ e indicar su dominio y su imagen.

Solución. Tabular algunos pares ordenados, ubicarlos en el plano cartesiano y suavizarlos con una curva "parábola". $Dom(y) = \mathbb{R}$ y la imagen es el intervalo $Im(y) = [-2; +\infty)$. (Ver Figura 1.31).

En efecto, $y = 2x^2 - 4x \rightarrow y = 2[x^2 - 2x + 1 - 1] \rightarrow y = 2(x - 1)^2 - 2 \rightarrow V(1; -2)$.

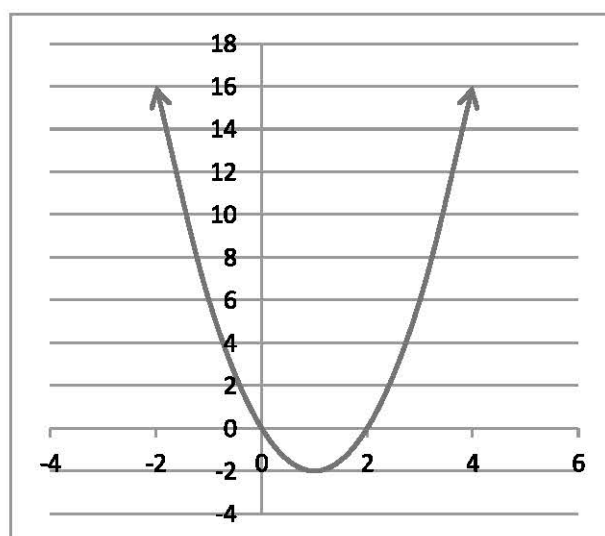


Figura 1.31

Ejemplo 14. (PROBLEMA) Calcular el máximo ingreso de una compañía que se estima mediante la función real $R(p) = 6\,000p - 30p^2$, siendo p el precio con $0 \leq p \leq 150$ en dólares.

Solución. Aplicando la definición y la observación respectiva, para una función cuadrática en general, se debe tener $f(x) = a(x - h)^2 + k$, adaptando a función “ R ” de variable “ p ” se tendrá $R(p) = a(p - h)^2 + k$.

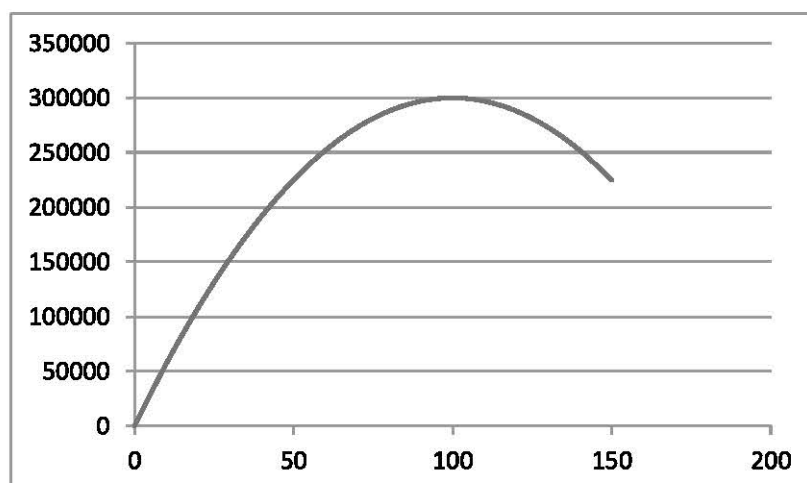


Figura 1.32

Completando cuadrados en la función dada se logra obtener la función particular que aparece en la Figura 1.32:

$$R(p) = -30(p - 100)^2 + 300\,000$$

Al comparar las $R(p)$ general y particular: $a = -30$, se llega a la conclusión de que la parábola abre hacia abajo y el vértice es el punto $V = V(100; 300\,000)$; esto es el punto máximo.

Significa que el máximo ingreso de la compañía es de \$300 000 y se logra cuando el precio es de \$100.

Ejemplo 15. (PROBLEMA) Supongamos que la cantidad de desperdicios echados en un río es una función cuadrática del tiempo. Si se arrojan 11,5 toneladas en un periodo de 5 días, y 20,8 toneladas después de 8 días, hallar la cantidad lanzada en t días. Luego determinar la cantidad para 12 días.

Solución.

La primera expresión nos indica que se busca la función $w(t) = at^2 + bt + c$, en donde no se conocen a , b y c ; sin embargo, estas pueden ser determinadas usando las siguientes condiciones: Si $t = 0$, $w = 0$; si $t = 5$, $w = 11,5$ y si $t = 8$, $w = 20,8$.

Al reemplazar los datos en la función $w(t)$ se obtiene que $a = 0,1$; $b = 1,8$ y $c = 0$, por tanto, finalmente la función será $w(t) = 0,1t^2 + 1,8t$.

Asimismo, se pide calcular $w(12) = (0,1)(12)^2 + (1,8)(12) = 36$; esto significa que a los 12 días, 36 toneladas de desperdicios son echados al río.

En la Figura 1.33, se muestra la gráfica correspondiente.

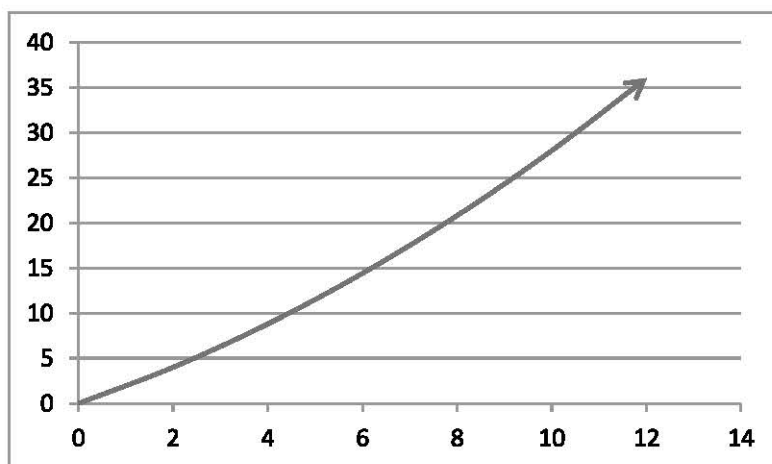


Figura 1.33

FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = x $ $y = x $ Con $ x = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$	$Dom(f) = \mathbb{R}$	$Im(f) = [0; +\infty >.$	$Gra(f)$ dos rayos que bisecan al primer y segundo cuadrante.

Esta función puede generalizarse escribiendo otras funciones como $f(x) = |g(x)|$, entre otras.

Ejemplo 16. Graficar la función valor absoluto para $-10 \leq x \leq 10$.

Solución. Tabular y graficar en el plano cartesiano $f(x) = |x|$. (Ver Figura 1.34)

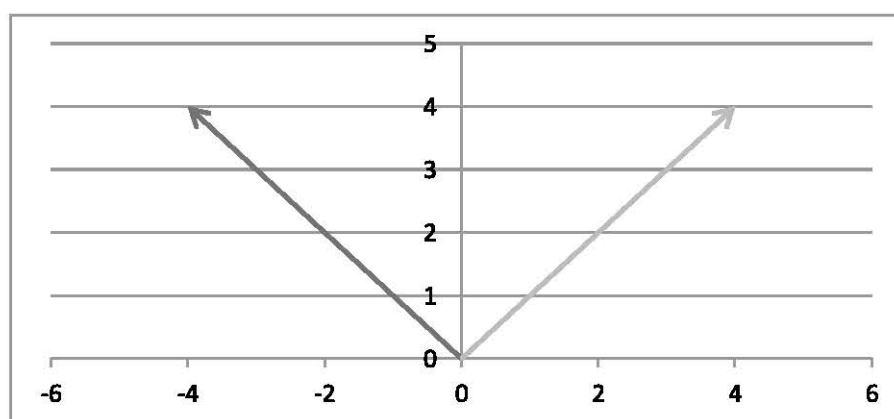


Figura 1.34

Ejemplo 17. Graficar la función $f(x) = |2x + 4|$ para $-5 \leq x \leq 5$.

Solución. Tabular y graficar en el plano cartesiano. (Ver Figura 1.35).

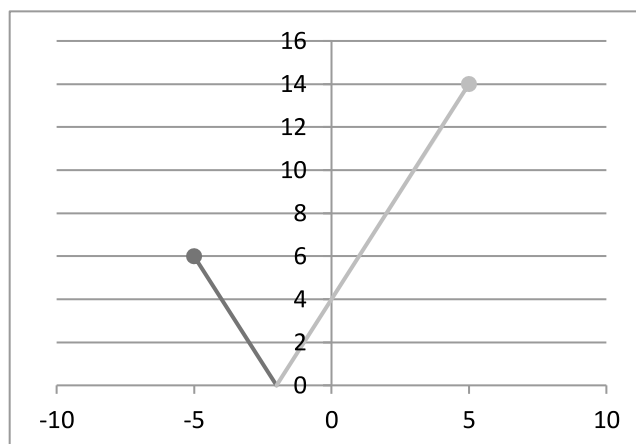


Figura 1.35

FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = \sqrt{x}$ $y = \sqrt{x}$	$Dom(f) = [0; +\infty)$	$Im(f) = [0; +\infty)$	$Gra(f) =$ Semiparábola que abre hacia la derecha.

Generalizando esta función se puede tener $f(x) = \sqrt{S(x)}$, donde $S(x)$ es cualquier expresión real que depende de "x", cuyo dominio sale de la condición $S(x) \geq 0$.

Ejemplo 18. Realizar la gráfica de la función raíz cuadrada.

Solución. Tabular y graficar en el plano cartesiano $f(x) = \sqrt{x}$. (Ver Figura 1.36)

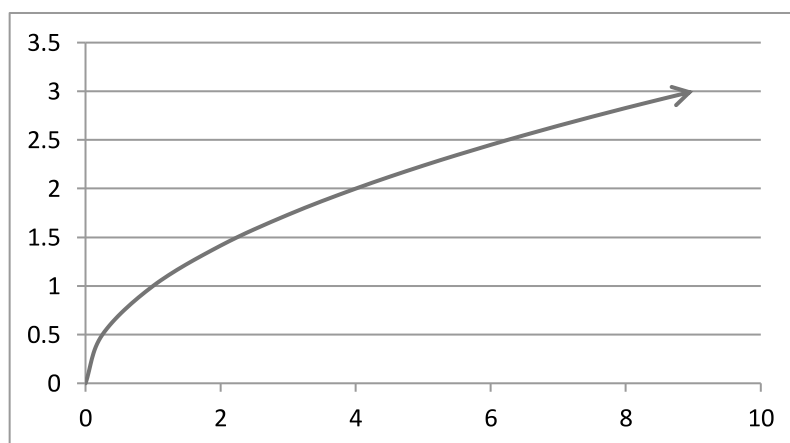


Figura 1.36

Ejemplo 19. Para la función $f(x) = \sqrt{2x+6}$ determinar el dominio, la imagen y la gráfica.

Solución. Tabular y graficar en el plano cartesiano. Es una semiparábola, parte positiva.

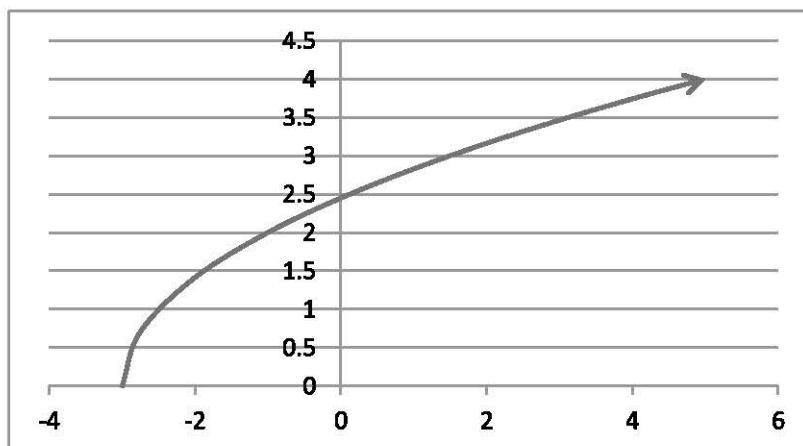


Figura 1.37

Se observa que su dominio es $Dom(f) = [-3; +\infty)$ y su imagen, $Im(f) = [0; +\infty)$. (Ver Figura 1.37).

Ejemplo 20. (PROBLEMA) El rendimiento de un corrector periodístico de estilo es estimado mediante la función $f(t) = \sqrt{\frac{t}{2}}$, donde “f” representa a los artículos corregidos y “t” es el tiempo dado en minutos. Calcular e interpretar $f(0)$, $f(2)$, $f(8)$ y $f(18)$.

Solución.

t	0	2	8	18	32	50
$f(t)$	0	1	2	3	4	5

$f(0) = 0$, significa que al inicio hay cero artículos corregidos.

$f(2) = 1$, significa que a los dos minutos hay 1 artículo corregido.

$f(8) = 2$, significa que pasados ocho minutos ha corregido dos artículos.

$f(18) = 3$, significa que pasados dieciocho minutos ha corregido tres artículos.

A medida que el tiempo transcurre el número de artículos corregidos aumenta proporcionalmente, aunque en menor medida. ¿Cuál es la razón? Intente explicarlo en un contexto real. (Ver Figura 1.38).

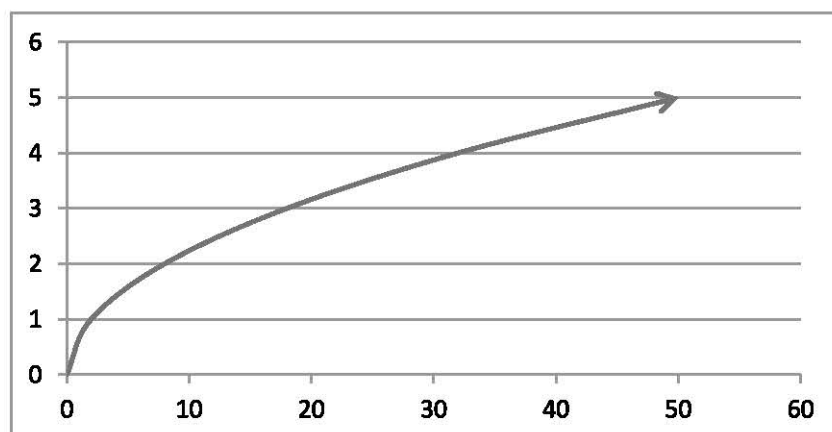


Figura 1.38

FUNCIÓN MÁXIMO ENTERO.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = \llbracket x \rrbracket$ $y = \llbracket x \rrbracket$ Con $\llbracket x \rrbracket = n$ si y solo si $n \leq x < n+1, n \in \mathbb{Z}$	$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$	$\text{Im}(f) = \mathbb{Z}$	$\text{Gra}(f)$ es un conjunto de segmentos horizontales escalonados de longitud 1.

Generalizando se pueden escribir funciones como $f(x) = \llbracket g(x) \rrbracket$, entre otras.

Ejemplo 21. Realizar la gráfica de la función Mayor entero $f(x) = \llbracket x \rrbracket$ para $-4 \leq x \leq 4$.
Figura 1.39

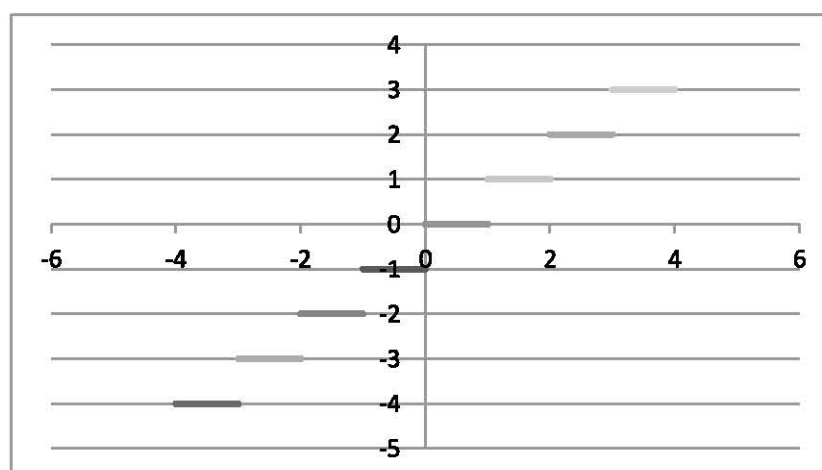


Figura 1.39

Ejemplo 22. Realice la gráfica de la función $f(x) = \llbracket \sqrt{x} \rrbracket$. (Ver Figura 1.40).

Solución. $\llbracket \sqrt{x} \rrbracket = n \Leftrightarrow n \leq \sqrt{x} < n+1 \Leftrightarrow n^2 \leq x < (n+1)^2$, pues $x \geq 0$.

Si $n = 0$: $\llbracket \sqrt{x} \rrbracket = 0 \Leftrightarrow x \in [0; 1)$

Si $n = 1$: $\llbracket \sqrt{x} \rrbracket = 1 \Leftrightarrow x \in [1; 4)$

Si $n = 2$: $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 2 \Leftrightarrow x \in [4; 9)$

Si $n = 3$: $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 3 \Leftrightarrow x \in [9; 16)$

Si $n = 4$: $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 4 \Leftrightarrow x \in [16; 25)$

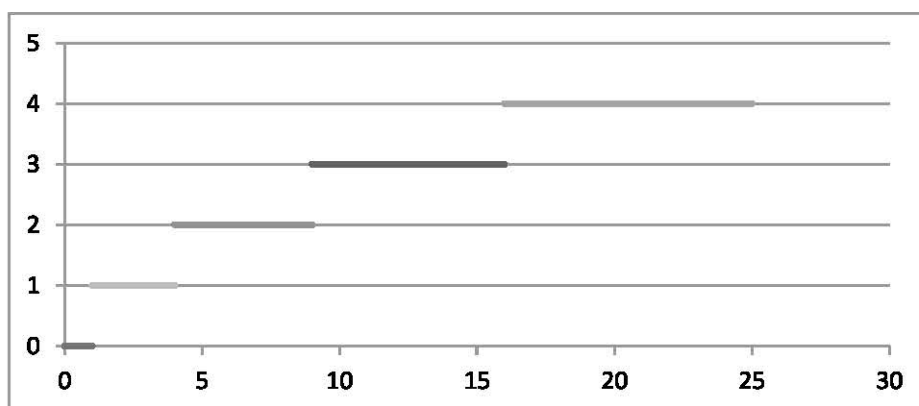


Figura 1.40

FUNCIÓN POLINÓMICA DE GRADO n .

Regla de correspondencia	$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$		
Polinomio de grado n	Dominio	Imagen	Gráfica
	$Dom(f) = \mathbb{R}$	Si n es impar $Im(f) = \mathbb{R}$. Si n es par, depende de la función.	$Gra(f)$, depende de la función.

Donde $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son números reales con $a_n \neq 0$ y " n " es un número entero positivo por el cual el polinomio es de grado n .

Para valores particulares de " n ", se tiene:

$n = 0 \rightarrow f(x) = a_0$ es una función constante o de grado cero. Recta horizontal.

$n = 1 \rightarrow f(x) = a_1 x + a_0$ es una función lineal o de grado uno. Recta.

$n = 2 \rightarrow f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ es una función cuadrática o de segundo grado. Parábola.

En toda función polinómica, el dominio es todo el conjunto de números reales: $Dom(f) = \mathbb{R}$.

La imagen depende del grado n : Si n es impar la $Im(f) = \mathbb{R}$; si n es par la $Im(f)$ depende de la función polinómica dada!

Ejemplo 23. Bosqueeje la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x - 1$.

Solución. El dominio es $Dom(f) = \mathbb{R}$ y la imagen es $Im(f) = \mathbb{R}$. Calcular los pares ordenados de la tabla, ubicarlos en el plano cartesiano y suavizarlos con una curva. (Ver Figura 1.41).

x	...	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	...
y	...	-16	-6,625	-1	1,625	2	0,875	-1	-2,875	-4	-3,625	-1	4,625	14	...

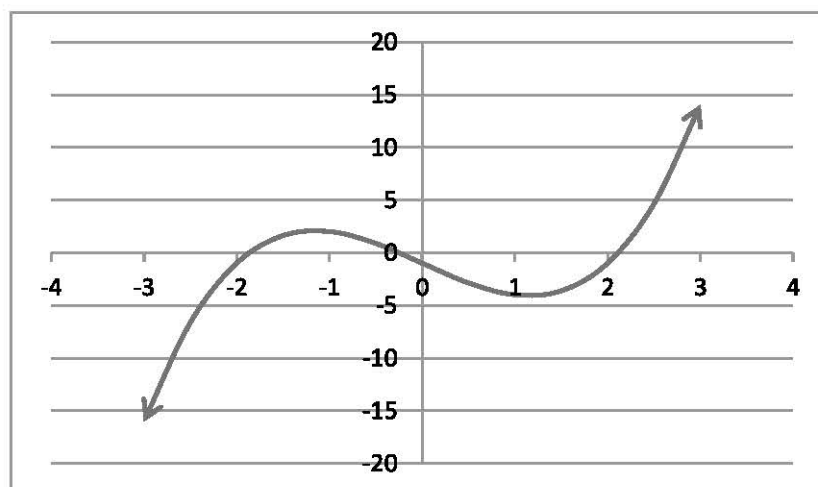


Figura 1.41

Ejemplo 24. (PROBLEMA) Una compañía estima sus ingresos mediante la función $R(x) = 4x - x^2$ con $x \in [0; 3]$, donde “ R ” es el ingreso en miles de dólares y “ x ” es la producción en miles de unidades. Calcular los ingresos para los niveles de producción de $x = 0$, $x = 1/2$, $x = 1$, $x = 3/2$, $x = 2$, $x = 5/2$ y $x = 3$. Graficar e interpretar.

Solución. Realice la gráfica en el intervalo dominio que se da: $[0; 3]$. (Ver Figura 1.42).

El dominio en esta función es para indicar que ella solo es significativa en el intervalo $[0; 3]$.

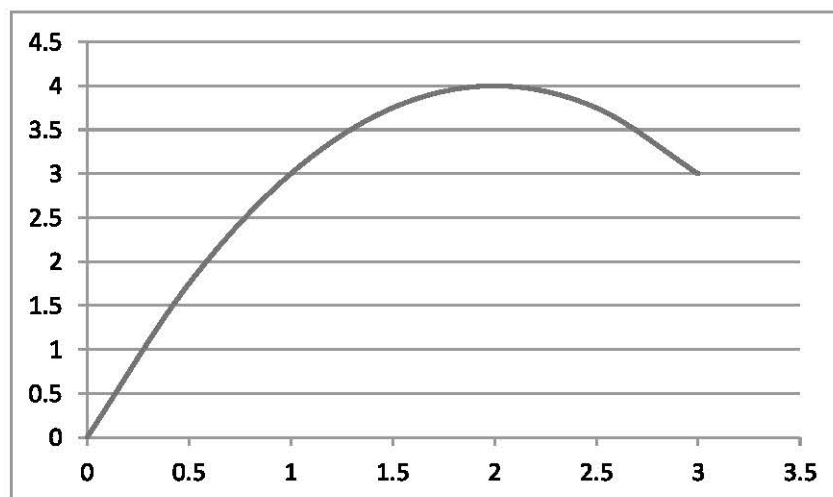


Figura 1.42

$R(0) = 0$: significa que cuando la venta es de 0 unidades, el ingreso es de 0 dólares.

$R(1,5) = 3,75$: denota que cuando la venta es de 1 500 unidades, el ingreso es de 3 750 dólares.

Nota. Puede hacerse otras interpretaciones: El ingreso máximo se da cuando la venta es de 2 000 unidades, este será de 4 000 dólares.

FUNCIÓN RACIONAL.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ o $y = \frac{p(x)}{q(x)}$, $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.	$Dom(f) = R - \{x/q(x) = 0\}$	$Im(f)$, depende de la función.	$Gra(f)$, depende de la función.

Ejemplo 25. Realice la gráfica de las siguientes funciones e indique el dominio y la imagen:

a) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

b) $g(x) = \frac{1}{x-2}$

c) $y = |x^2 - 4|$

Solución.

(a) La función $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ tiene como dominio $Dom(f) = R$ e imagen $Im(f) = [-1; 1]$. (Ver Figura 1.43).

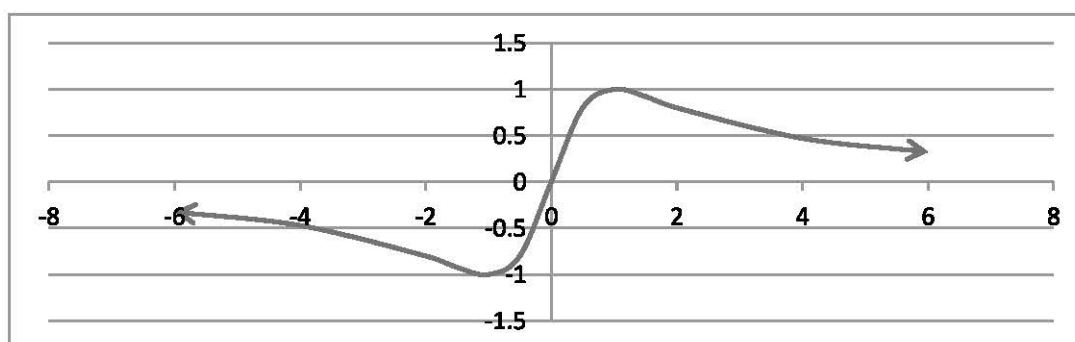


Figura 1.43

b) La función $g(x) = \frac{1}{x-2}$ tiene como dominio $Dom(f) = R - \{2\}$ e imagen $Im(f) = R - \{0\}$. Tal como se muestra en la Figura 1.44.

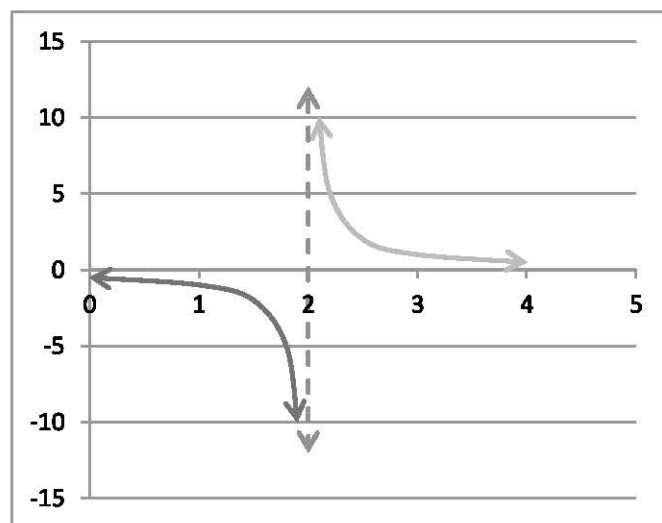


Figura 1.44

c) La función $y = |x^2 - 4|$ tiene como dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$ e imagen $Im(f) = [0; +\infty)$. (Ver Figura 1.45)

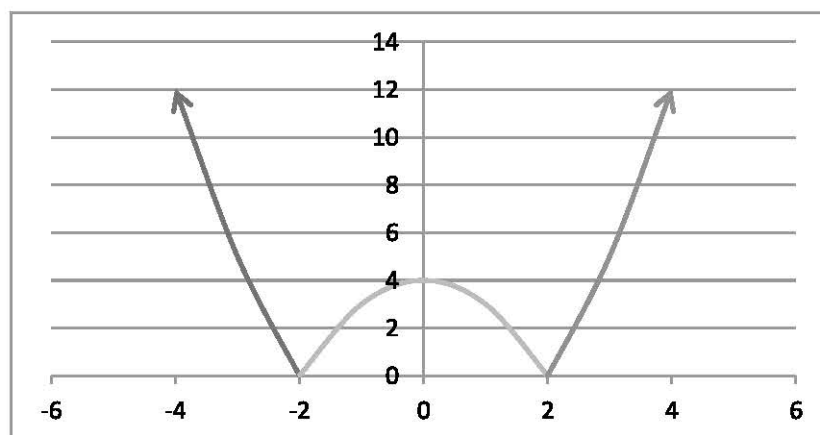


Figura 1.45

GRÁFICA DE FUNCIONES DIVERSAS.

Ejemplo 26. Graficar en el plano cartesiano, las siguientes funciones reales de variable real:

a) $f(x) = \frac{3}{2}x$

b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$

c) $y = 3 + 4x - x^2$

Solución.

(a) Se hace una tabulación de la función $f(x) = \frac{3}{2}x$:

x	...	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
$f(x)$	...	-1,5	0	1,5	3	4,5	6	7,5	9	...

Se observa que el dominio es el intervalo $Dom(f) = \mathbb{R}$ y la imagen, el intervalo $Im(f) = \mathbb{R}$; dado que en la regla de correspondencia no se descubre restricciones.

La gráfica de la función real $f(x) = \frac{3}{2}x$ se muestra en seguida como una recta. (Ver Figura 1.46).

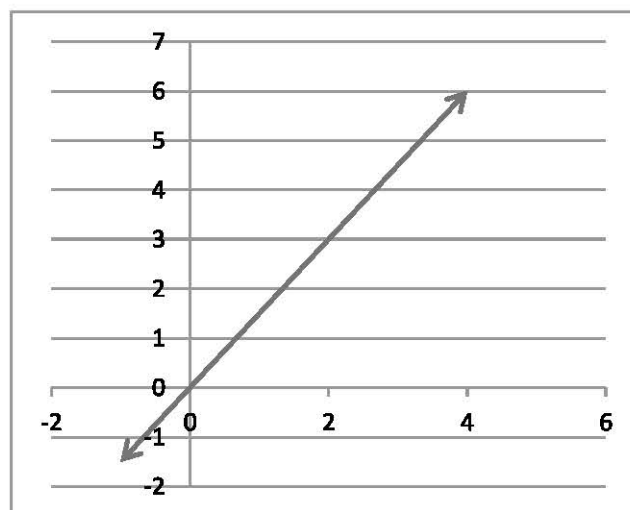


Figura 1.46

(b) Se hace una tabulación de la función $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$:

Se observa que el dominio es el intervalo $Dom(f) = [-3; 3]$, el cual surge de la condición $9 - x^2 \geq 0$. La imagen es el intervalo $Im(f) = [0; 3]$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x)$	0	2,24	2,83	3	2,83	2,24	0	...

En la Figura 1.47, se muestra a continuación la gráfica de la función real $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ como una semicircunferencia, parte positiva (lo que está por sobre el eje X).

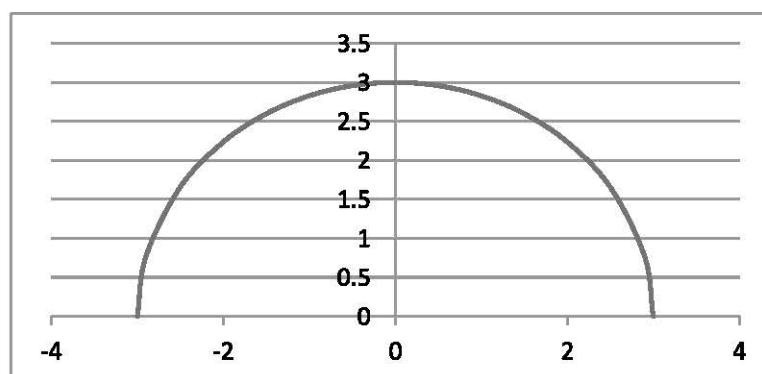


Figura 1.47

(c) Se hace la tabulación de la función real $y = 3 + 4x - x^2$.

x	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
$f(x)$	...	-15	-8	-3	0	1	0	-3	-8	-15	...

Se advierte que el dominio es el intervalo $Dom(f) = \mathbb{R}$ y la imagen, el intervalo $Im(f) = (-\infty; 1]$. (Ver Figura 1.48).

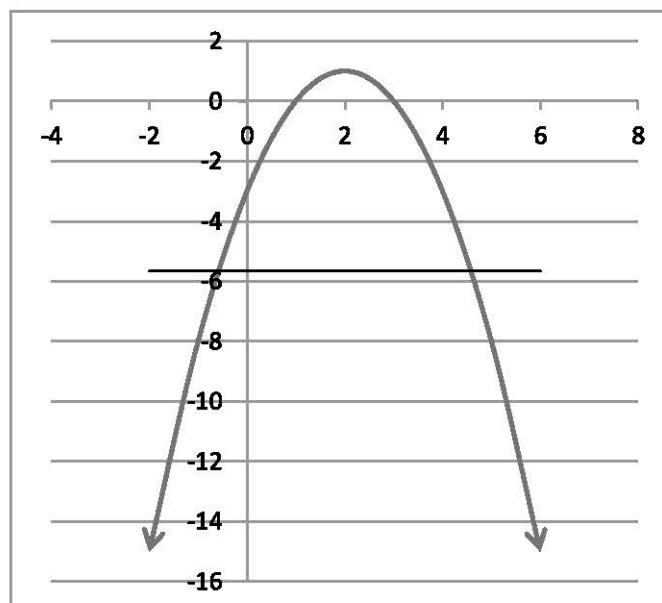


Figura 1.48

La gráfica de la función real $y = 3 + 4x - x^2$ es una parábola.

Ejemplo 27. Realice la gráfica de las funciones reales que se dan a continuación (en algunos casos se puede usar una escala apropiada):

a) $D(t) = 100 + 15t$, con $2 \leq t \leq 24$.

b) $h(x) = \frac{100x}{20+x}$ con $x \geq 0$.

Solución. Notamos que estas funciones son dadas con su respectivo dominio. Se tabula para el dominio, se ubica los puntos en el sistema de coordenadas y se suaviza mediante una curva continua.

a) La función $D(t) = 100 + 15t$ es dada con el dominio $2 \leq t \leq 24$. (Observar Figura 1.49).

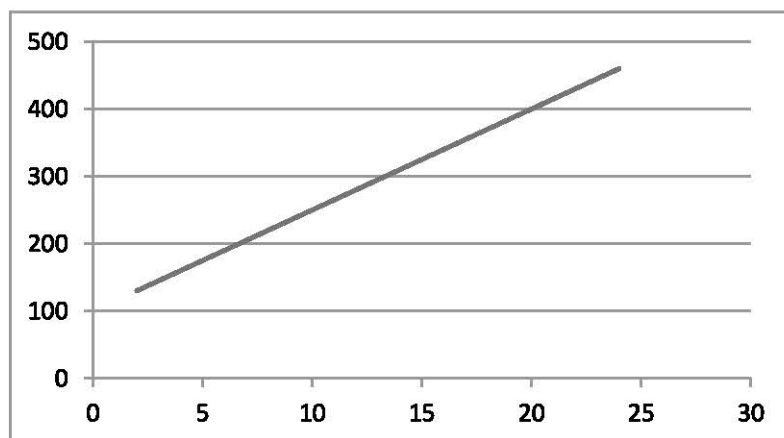


Figura 1.49

b) La función $h(x) = \frac{100x}{20+x}$ surge con el dominio $x \geq 0$. (Ver Figura 1.50).

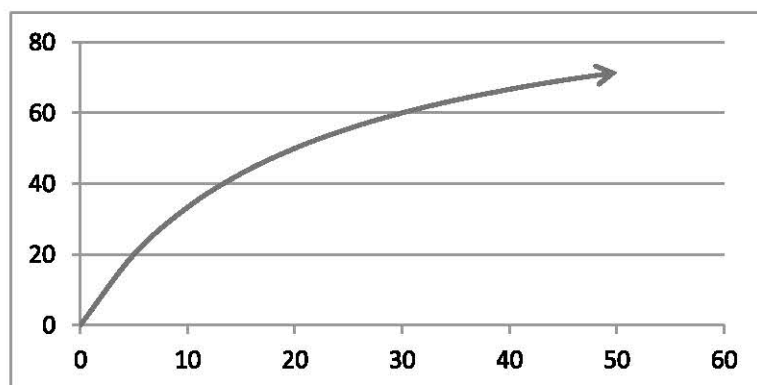


Figura 1.50

Ejemplo 28. Sea la función $h(x) = \begin{cases} x^2; & x \leq 3 \\ x + 3; & x > 3 \end{cases}$, determinar $h(-1)$, $h(3)$, $h(5)$, su dominio, su imagen y su gráfica.

Solución.

Se procede tal como en el ejemplo 7. La gráfica (Figura 1.51) resultante será la siguiente:

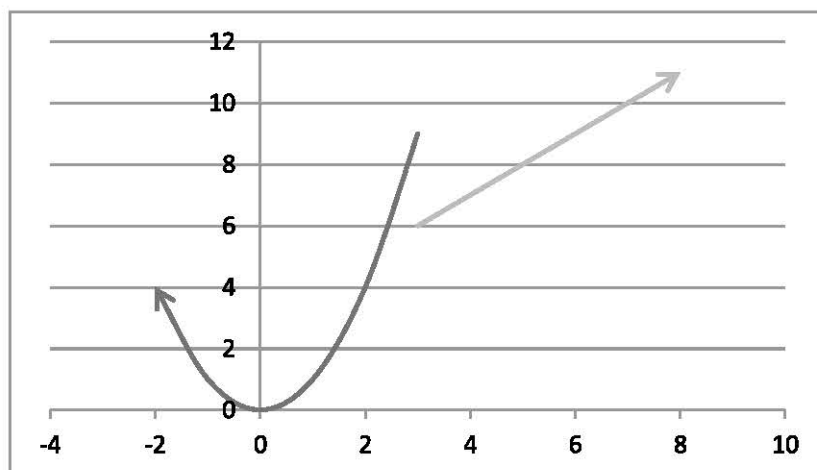


Figura 1.51

Ejemplo 29. Sea la función $h(x) = x^2 - 4x + 2$. Determinar dominio, imagen y gráfica.

Solución. El dominio es $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y la imagen es $\text{Im}(f) = [-2; +\infty)$. La gráfica (Figura 1.52) será la siguiente:

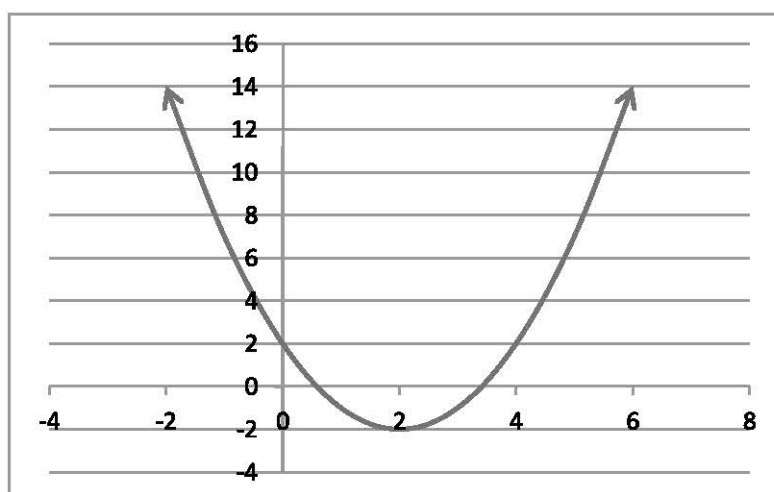


Figura 1.52

OBSERVACIÓN. Se advierte hasta aquí que toda función real queda conformada por cuatro elementos: la regla de correspondencia, el dominio, la imagen y la gráfica.

El *dominio* y la *imagen* serán intervalos de números reales, salvo que se exprese otra característica.

1.3. OPERACIONES CON FUNCIONES. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Siendo las funciones reales $y = f(x)$ números reales, puede realizarse con ellos las operaciones básicas de números reales.

DEFINICIÓN. Sean $y = f(x)$ e $y = g(x)$ dos funciones cuyos dominios, respectivamente, son $Dom(f)$ y $Dom(g)$, entonces también resultan funciones reales:

El *Producto por un escalar* dado por $(kf)(x) = kf(x)$, con $Dom(kf) = Dom(f)$.

La *Suma* dada por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, con $Dom(f + g) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

La *Diferencia* dada por $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, con $Dom(f - g) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

El *Producto* dado por $(fg)(x) = f(x)g(x)$, con $Dom(fg) = Dom(f) \cap Dom(g)$.

El *Cociente* dado por $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$,

$$\text{con } Dom\left(\frac{f}{g}\right) = Dom(f) \cap Dom(g) - \{x \in Dom(f) / g(x) = 0\}.$$

Ejemplo 1. Sean las funciones $f(x) = 8x - 3$, $g(x) = 5x + 5$ con $Dom(f) = [10; 22]$, $Dom(g) = [9; 20]$. Determinar la función *diferencia*, la función *producto* y la función *cociente* con sus respectivos dominios.

Solución.

a) La función diferencia es $(f - g)(x) = 8x - 3 - (5x + 5)$, esto significa $(f - g)(x) = 3x - 8$.

El dominio será $Dom(f - g) = [10; 22] \cap [9; 20]$, es decir $Dom(f - g) = [10; 20]$.

b) La función producto es $(fg)(x) = (8x - 3)(5x + 5)$, esto es $(fg)(x) = 40x^2 + 25x - 15$.

El dominio será $Dom(fg) = [10; 22] \cap [9; 20]$, en síntesis $Dom(fg) = [10; 20]$.

c) La función cociente será $(f/g)(x) = \frac{8x-3}{5x+5}$.

El dominio de la función cociente resulta ser $Dom(f/g) = [10; 22] \cap [9; 20] - \{x: 5x + 5 = 0\}$, es decir $Dom(f/g) = [10; 20]$.

Ejemplo 2. (PROBLEMA) Una compañía arroja una cantidad de desechos a un río, la que se modela mediante la función $f(x) = 10x - x^2$ en toneladas; mientras que el municipio limpia el cauce de dicho río recogiendo desechos cuya cantidad es modelada por la función $g(x) = 8x - x^2$. Siendo x el tiempo en horas para una jornada de 8 h.

a) Hallar e interpretar $f(6)$.

b) Hallar e interpretar $g(6)$.

c) Determinar la cantidad de desperdicios que deja de recogerse a las 6 horas de jornada.

d) Identificar la función que representaría la cantidad de desperdicios que se dejaría de recoger.

e) Precisar el dominio y la imagen para las funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$ y realizar la gráfica en un mismo sistema de coordenadas.

f) Graficar la función que representaría la cantidad de desperdicios que se dejaría de recoger y precisar tanto su dominio como su imagen.

Solución.

(a) Calculando $f(6) = 24$ Ton. Significa que, a las seis horas, la compañía ha arrojado 24 toneladas de desperdicios al río.

(b) Calculando $g(6) = 12$ Ton. Se entiende que a las seis horas el municipio recogió 12 toneladas de desperdicios del río.

(c) La cantidad de desperdicios que dejaría de recogerse sería $f(6) - g(6) = 12$ toneladas.

(d) La función sería la diferencia $(f - g)(x) = 10x - x^2 - (8x - x^2) \rightarrow (f - g)(x) = 2x$

(e) El $Dom(f) = [0; 8]$ y el $Dom(g) = [0; 8]$, es decir, las ocho horas de jornada diaria.

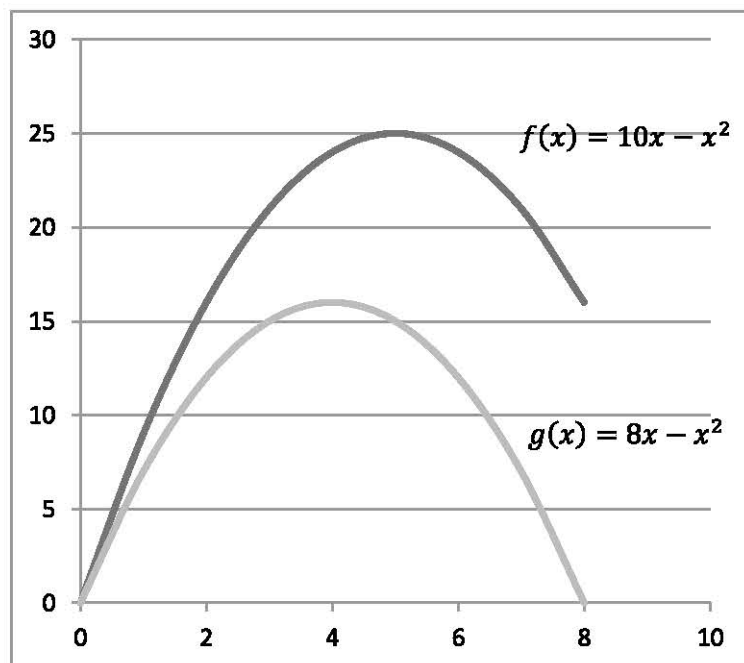


Figura 1.53

La imagen de $y = f(x)$ es $Im(f) = [0; 25]$; asimismo, la imagen de $y = g(x)$ es $Im(g) = [0; 16]$. (Ver Figura 1.53).

(f) La función sería la diferencia $(f - g)(x) = 2x$, cuyo dominio resulta ser $Dom(f - g) = [0; 8]$, la imagen será $Im(f) = [0; 16]$; cuya gráfica se muestra en seguida a través de la Figura 1.54:

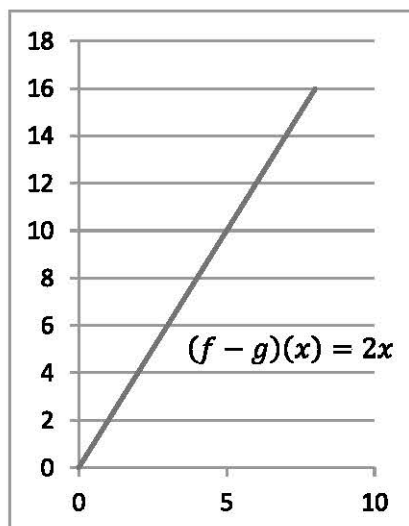


Figura 1.54

Ejemplo 3. (PROBLEMA) Una planta tiene capacidad para producir de 0 a 100 refrigeradoras diarias. Los gastos generales fijos de la planta son \$ 2 200 y el costo directo (material y mano de obra) para producir un refrigerador es de \$ 151. Escriba una fórmula para $T(x)$, el costo total de producir “ x ” refrigeradoras al día, también el costo unitario $U(x)$ (costo medio por refrigerador). ¿Cuáles son los dominios de estas funciones?

Solución. El N° de refrigeradoras = x , x entero, con $0 \leq x \leq 100$.

Gastos fijos = 2 200; Gastos directos en cada producto = 151.

Costo total: $T(x) = 2\,200 + 151x$, con $0 \leq x \leq 100$.

Costo unitario: $U(x) = \frac{T(x)}{x} \rightarrow U(x) = \frac{2200}{x} + 151$, con $0 \leq x \leq 100$.

Ejemplo 4. (PROBLEMA) A la compañía ABC le cuesta $400 + 5\sqrt{x(x-4)}$ dólares fabricar “ x ” estufas de juguete, las cuales vende a \$6,00 cada una.

- Encuentre una fórmula para la utilidad total $P(x)$ de fabricar “ x ” estufas.
- Evalúe e interprete $P(200)$ y $P(1\,000)$.
- ¿Cuántas estufas tiene que fabricar la ABC únicamente para romper el equilibrio?

Solución.

Costo: $C(x) = 400 + 5\sqrt{x(x-4)}$, Ingreso: $R(x) = 6x$, Utilidad: $P(x) = R(x) - C(x)$

(a) La función utilidad será $P(x) = 6x - 400 - 5\sqrt{x(x-4)}$.

(b) Evaluando $P(200) = -189,95$ dólares. Se tiene una pérdida de 189,95 dólares.

Evaluando luego $P(1\,000) = 610,01$ dólares. Hay una ganancia de 610,01 dólares.

(c) Para romper el equilibrio debe suceder que $6x = 400 - 5\sqrt{x(x-4)}$, lo que al resolverse dentro del universo $x \in U = [\frac{400}{6}; +\infty)$ da como resultado $x = 389,97 \approx 390 \in U$ y $x = 37,26 \notin U$, siendo U el universo de solución de la ecuación.

Ejemplo 5. Un comerciante modela los costos de producción mediante el modelo $f(x) = 30x + 250$ nuevos soles, siendo la capacidad instalada para 120 productos por día.

- Escriba la función para la época de auge si esta es aumentada en un 50 por ciento.
- Escriba la función para la época de austeridad si esta es reducida en un 25 por ciento.
- Grafique las funciones en un mismo sistema de coordenadas.

Solución.

(a) La función para época de auge será $(1,5 \cdot f)(x) = 45x + 375$ nuevos soles.

Renombrando: $g(x) = 45x + 375$

(b) La función para época de auge será $(0,75 \cdot f)(x) = 22,5x + 187,5$ nuevos soles.

Renombrando: $h(x) = 22,5x + 187,5$

(c) En la Figura 1.55, se muestra la gráfica correspondiente:

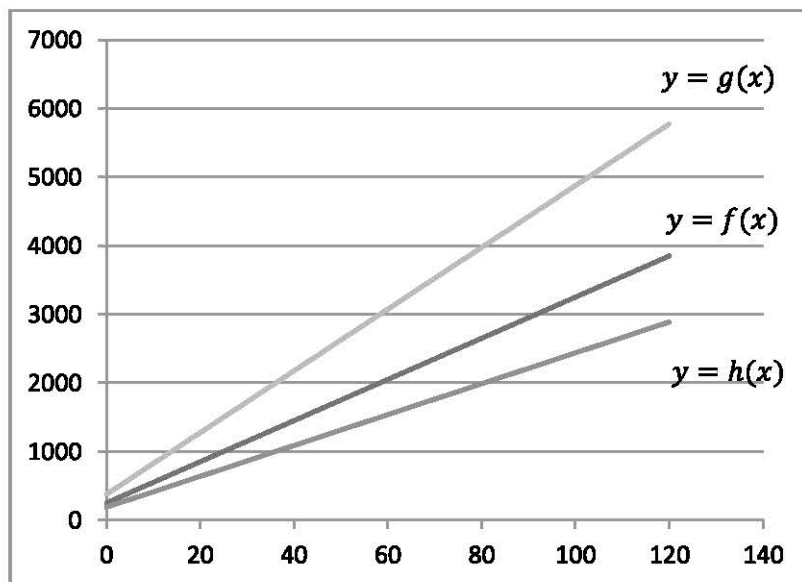


Figura 1.55

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES. La composición de dos funciones reales se ve como una nueva forma de operación entre dichas funciones.

Dadas las funciones $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$, la Función Compuesta de f y g , que se denota por $g \circ f$, está definida como $[g \circ f](x) = g[f(x)]$, cuyo dominio es $Dom(g \circ f) = \{x \in Dom(f) / f(x) \in Dom(g)\}$.

Nota. La función compuesta $(f \circ g)$ estaría definida como $[f \circ g](x) = f[g(x)]$, cuyo dominio es $\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(g) / g(x) \in \text{Dom}(f)\}$.

Ejemplo 5. Dadas las funciones $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = x^2 + 1$, determinar la función composición de f con g , así también de g con f y sus dominios.

Solución.

En primer lugar, se tiene $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$.

Aplicando la definición, respectivamente, se obtiene lo siguiente:

$$\text{a) } [g \circ f](x) = g[f(x)] = [f(x)]^2 + 1 = [2x - 3]^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10.$$

$$\text{Es decir, } [g \circ f](x) = 4x^2 - 12x + 10.$$

$$\text{El dominio será } \text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}(f) / f(x) \in \text{Dom}(g)\}.$$

$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

$$\text{b) } [f \circ g](x) = f[g(x)] = 2g(x) - 3 = 2[x^2 + 1] - 3 = 2x^2 - 1.$$

$$\text{Es decir, } [f \circ g](x) = 2x^2 - 1.$$

$$\text{El dominio resulta ser } \text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}(f) / f(x) \in \text{Dom}(g)\}.$$

$$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

Ejemplo 6. Determinar dos funciones, f y g , que cumplan la composición $h(x) = [f \circ g](x)$.

$$\text{a) } h(x) = (3x + 2)^6$$

$$\text{b) } h(x) = \frac{100}{4-3x}$$

$$\text{c) } h(x) = \sqrt{2 - x^2}$$

Solución.

No existe una única solución, por lo que se proponen las siguientes:

(a) Sean las funciones reales $f(x) = x^6$ y $g(x) = 3x + 2$ que forman la composición.

$$\text{En efecto, } [f \circ g](x) = f[g(x)] = [g(x)]^6 = (3x + 2)^6 = h(x).$$

(b) Sean las funciones reales $f(x) = \frac{100}{x}$ y $g(x) = 4 - 3x$ que forman la composición.

$$\text{En efecto, } [f \circ g](x) = f[g(x)] = \frac{100}{g(x)} = \frac{100}{4-3x} = h(x).$$

(c) Sean las funciones reales $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2 - x^2$ que forman la composición.

$$\text{En efecto, } [f \circ g](x) = f[g(x)] = \sqrt{g(x)} = \sqrt{2 - x^2} = h(x).$$

Ejemplo 7. (PROBLEMA) La compañía FACUSA estima que el costo “y” (en dólares) de producir “u” tenedores es $f(u) = 30\sqrt{u} + 1000$. El número de tenedores producidos semanalmente depende, a su vez, del número “x” de empleados; donde $g(x) = 500x - 400$. Expresar el costo como una función del número de empleados. Si la compañía cuenta con 25 trabajadores, ¿cuántos tenedores se producirá semanalmente y a qué costo?

Solución.

En la función de costos $f(u) = 30\sqrt{u} + 1000$, $f[g(x)] = 30\sqrt{500x - 400} + 1000 \rightarrow [f \circ g](x) = 30\sqrt{500x - 400} + 1000$.

Con 25 trabajadores se produce $g(25) = 500(25) - 400 = 12\,100$ tenedores.

El costo de producir los 12 100 tenedores con los 25 trabajadores es el siguiente:

$$[f \circ g](25) = f[g(25)] = 30\sqrt{12100} + 1000 = 4\,300 \text{ dólares.}$$

Respuesta. Con 25 trabajadores se produce $g(25) = 12\,100$ tenedores semanalmente a un costo total de $[f \circ g](25) = 4\,300$ dólares.

Ejemplo 8. Si $f(x) = x^2 + 2x + 2$, hallar $g(x)$ tal que cumpla $f(g(x)) = x^2 - 4x + 5$.

Solución.

Hay dos de tales funciones: $g_1(x) = x - 3$ y $g_2(x) = 1 - x$.

$$\text{En efecto, } f(g(x)) = x^2 - 4x + 5 \rightarrow [g(x)]^2 + 2g(x) + 2 = x^2 - 4x + 5 \rightarrow$$

$$[g(x)]^2 + 2g(x) + 1 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow [g(x) + 1]^2 = (x - 2)^2 \rightarrow g(x) + 1 = \pm(x - 2)$$

De donde se obtiene dos soluciones: $g_1(x) = x - 3$ y $g_2(x) = 1 - x$.

Ejemplo 9. (PROBLEMA) Los defensores del medioambiente han estimado que el nivel promedio de monóxido de carbono en el aire es dado por $M(P) = (1 + 0,6P)$ partes por millón cuando el número de personas es P-miles. Si la población en miles en el momento t en años es modelado por $P(t) = 400 + 30t + 0,5t^2$.

a) Exprese el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función del tiempo.

b) Calcule el nivel de monóxido de carbono en $t = 5$ años y luego en $t = 8$ años.

Solución.

(a) Para expresar el monóxido de carbono en función del tiempo, se requiere establecer la función compuesta $[MoP](t) = M[P(t)]$. Sustituyendo $P(t)$ en $M(P)$, tenemos:

$$M[P(t)] = M[400 + 30t + 0,5t^2] = 1 + 0,6(400 + 30t + 0,5t^2) = 241 + 18t + 0,09t^2$$

Es decir, $[MoP](t) = 241 + 18t + 0,09t^2$.

(b) Se nos pide evaluar la función compuesta en $t = 5$ años.

$$[MoP](5) = M[P(5)] = 241 + 18(5) + 0,09(5)^2 = 333,25 \text{ ppm.}$$

$$\text{Luego en } t = 8 \text{ años: } [MoP](8) = M[P(8)] = 241 + 18(8) + 0,09(8)^2 = 379,24 \text{ ppm.}$$

1.4. TRANSFORMACIONES EN UNA FUNCIÓN REAL

Dada una función real $y = f(x)$ se puede realizar con ella una serie de transformaciones; lo cual da como resultado nuevas funciones equivalentes, aunque en otras posiciones trasladadas según un valor real de referencia $c > 0$:

a) Traslaciones horizontales:

- | | |
|--|----------------|
| i) Función original: | $y = f(x)$ |
| ii) Traslación horizontal de “ c ” unidades a la derecha: | $y = f(x - c)$ |
| iii) Traslación horizontal de “ c ” unidades a la izquierda: | $y = f(x + c)$ |

b) Traslaciones verticales:

- | | |
|--|----------------|
| i) Función original: | $y = f(x)$ |
| ii) Traslación vertical de “ c ” unidades hacia abajo: | $y = f(x) - c$ |
| iii) Traslación vertical de “ c ” unidades hacia arriba: | $y = f(x) + c$ |

c) Expansiones y contracciones:

- | | |
|--|--------------------|
| i) Función original: | $y = f(x)$ |
| ii) Alargamiento vertical en c unidades ($c > 1$): | $y = c \cdot f(x)$ |
| iii) Reducción vertical en c unidades ($0 < c < 1$): | $y = c \cdot f(x)$ |
| iv) Reflexión respecto a eje X: | $y = -f(x)$ |

Ejemplo 1. Aplicar las traslaciones horizontales y verticales a la función $y = \sqrt{x}$ para $c = 2$. Una reflexión respecto al eje X.

Solución.

(i) Función original (observar Figura 1.56): $y = \sqrt{x}$

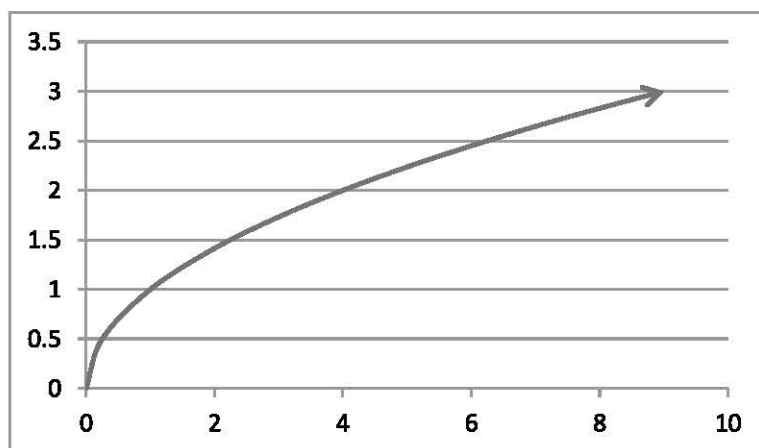


Figura 1.56

(ii) Traslación horizontal de " $c = 2$ " unidades a la derecha (ver Figura 1.57): $y = \sqrt{x - 2}$

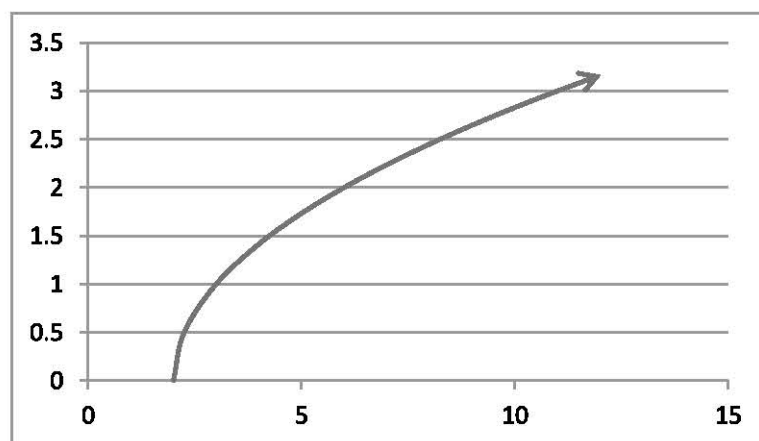


Figura 1.57

(iii) Traslación horizontal de " $c = 2$ " unidades a la izquierda (ver Figura 1.58): $y = \sqrt{x + 2}$

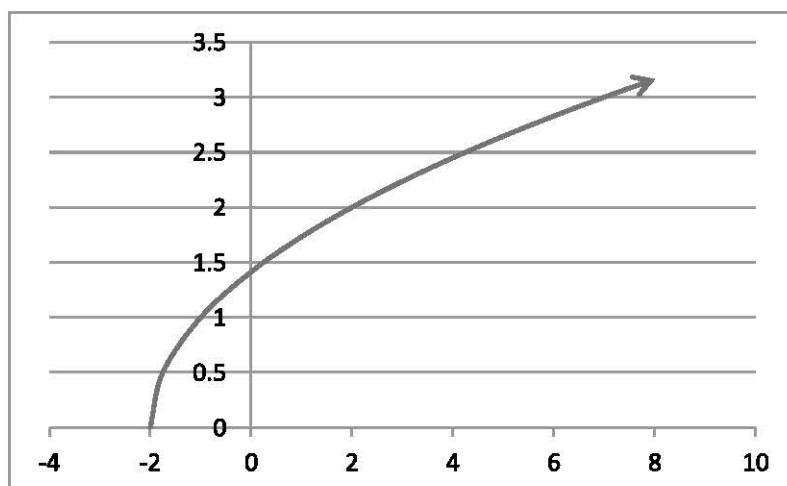


Figura 1.58

(iv) Traslación vertical de " $c = 2$ " unidades hacia abajo (ver Figura 1.59): $y = \sqrt{x} - 2$

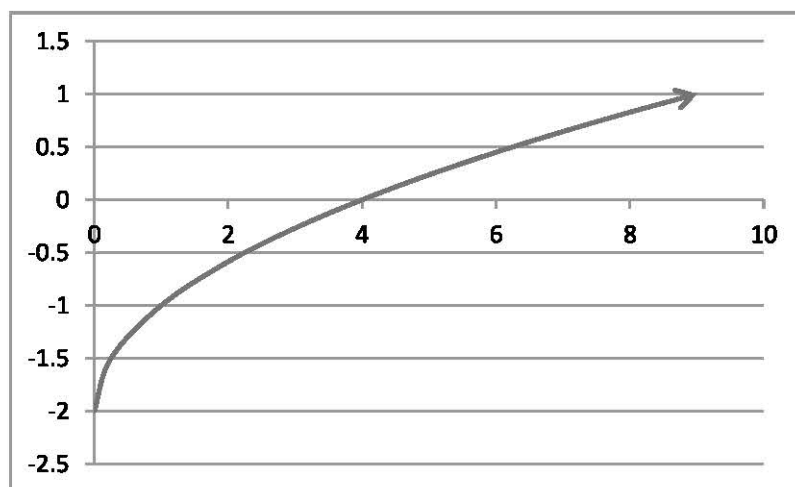


Figura 1.59

(v) Traslación vertical de " $c = 2$ " unidades hacia arriba (ver Figura 1.60): $y = \sqrt{x} + 2$

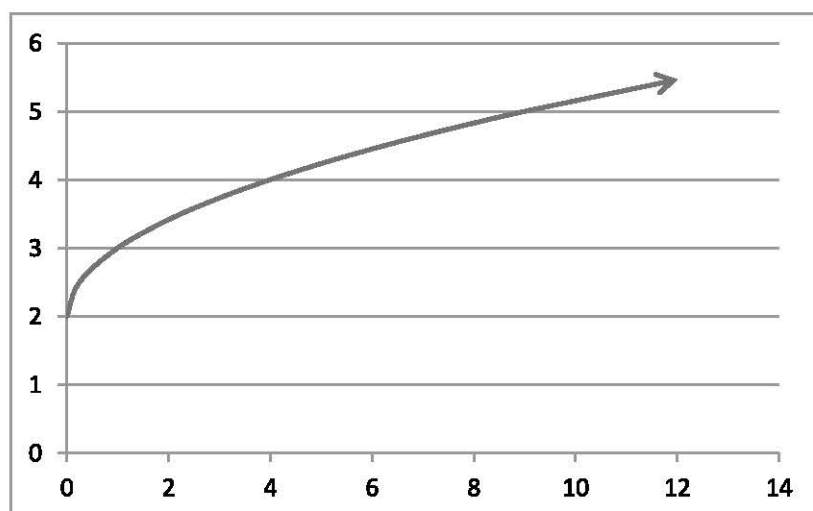


Figura 1.60

(vi) Reflexión respecto a eje X (ver Figura 1.61): $y = -\sqrt{x}$

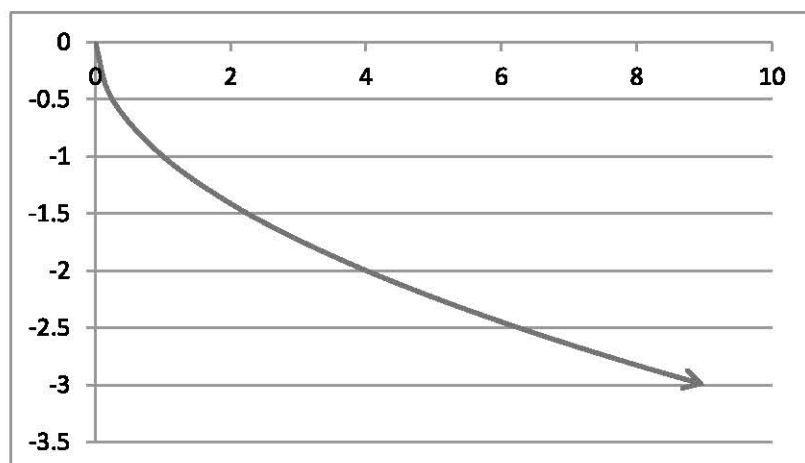


Figura 1.61

Ejemplo 2. Sea la función $f(x) = x^2$; se hace las siguientes transformaciones: un alargamiento vertical de $c = 3$ unidades; una reducción de $c = 0,5$ unidades; y una reflexión respecto al eje X. Obsérvese estos hechos gráficamente.

Solución.

(i) Un alargamiento vertical de $c = 3$ unidades (Figura 1.62): $y = 3x^2$.

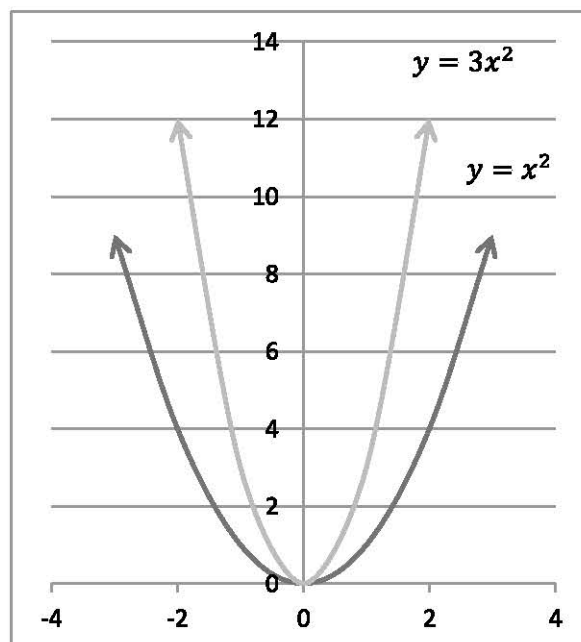


Figura 1.62

(ii) Un alargamiento vertical de $c = 0,5$ unidades (Figura 1.63): $y = 0,25x^2$

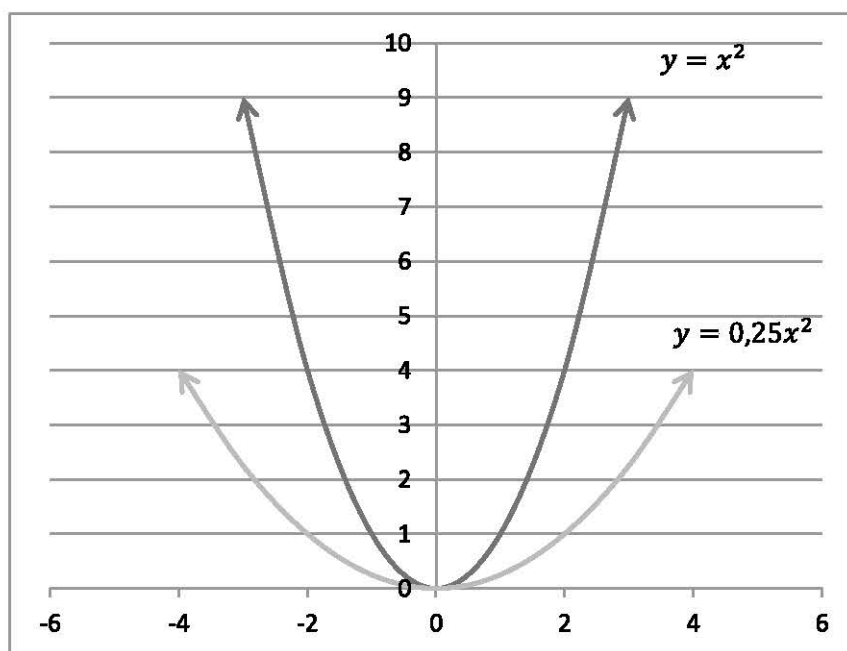


Figura 1.63

(iii) Una reflexión respecto al eje X (Figura 1.64): $y = -x^2$

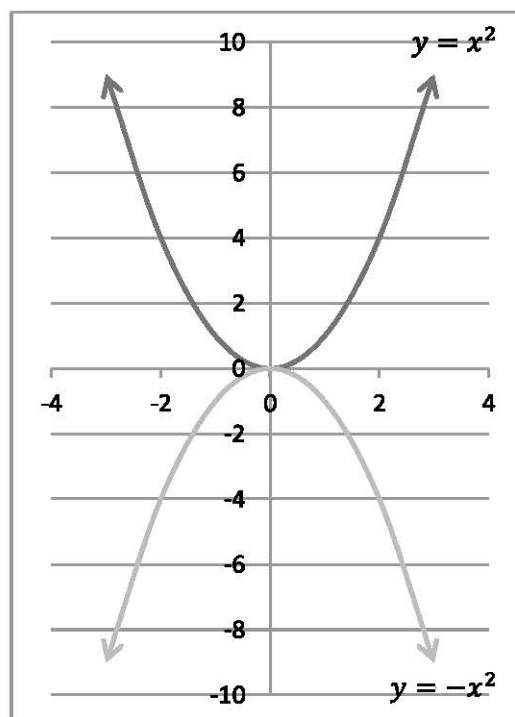


Figura 1.64

1.5. FUNCIÓN INYECTIVA, SOBREYECTIVA Y BIYECTIVA

Esta es otra manera de clasificar a las funciones reales, tomando como referencia el dominio o la imagen de una función real.

DEFINICIÓN. Sea $f: A \rightarrow B$ una función real de variable real, entonces se dice:

- i) Que f es una *aplicación* si el dominio es todo el conjunto de partida, es decir, $Dom(f) = A$.
- ii) Que f es una función *Sobreyectiva* si la imagen es todo el conjunto de llegada, esto significa $Im(f) = B$.
- iii) Que f es una función *Inyectiva* si cumple $\forall x_1, x_2 \in Dom(f)$ y $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Gráficamente, una función es inyectiva cuando al trazar rectas horizontales por toda la gráfica, esta es cortada en un punto como máximo.

- iv) Que f es una función *Biyectiva* si simultáneamente resulta sobreyectiva e inyectiva.

Ejemplo 1. En base a la definición anterior, verifique las siguientes funciones reales:

a) $f(x) = 3x - 2$

b) $g(x) = \frac{x+1}{2x}$

c) $h(x) = \sqrt{5-x}$

Solución.

Aplique cada parte de la definición cuidadosamente.

- (a) La función $f(x) = 3x - 2$ tiene como dominio $Dom(f) = \mathbb{R}$, así como imagen $Im(f) = \mathbb{R}$.

Entonces f es una aplicación, es sobreyectiva, es inyectiva y biyectiva. (Ver Figura 1.65).

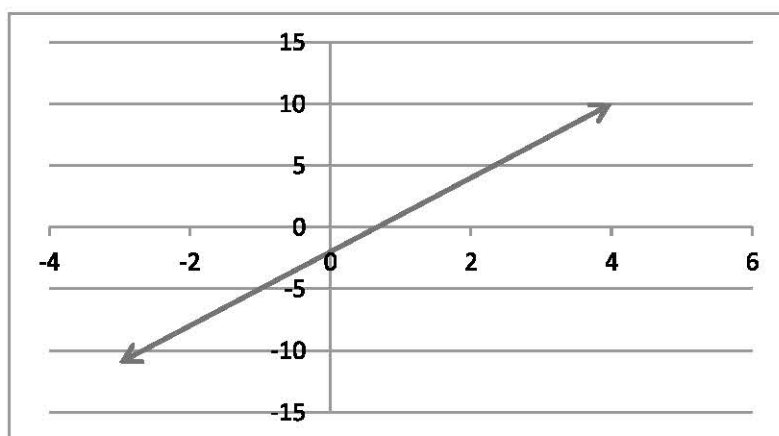


Figura 1.65

- (b) La función $g(x) = \frac{x+1}{2x}$ tiene como dominio $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, así como imagen $Im(f) = \mathbb{R} - \{1/2\}$. (Ver Figura 1.66).

La recta vertical $x = 0$ se denomina asíntota vertical.

La recta horizontal $y = \frac{1}{2}$ se denomina asíntota horizontal.

Entonces g es una aplicación, es sobreyectiva, es inyectiva y biyectiva en su dominio.

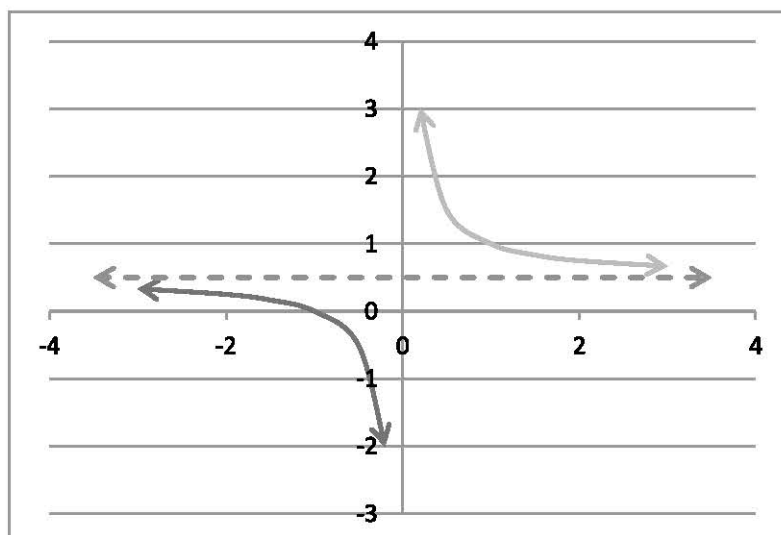


Figura 1.66

(c) La función $h(x) = \sqrt{5-x}$ tiene como dominio $Dom(f) = \langle -\infty; 5] \rangle$, así como imagen $Im(f) = [0; +\infty)$. (Ver Figura 1.67).

Entonces f es una aplicación, es sobreyectiva, es inyectiva y biyectiva en su dominio.

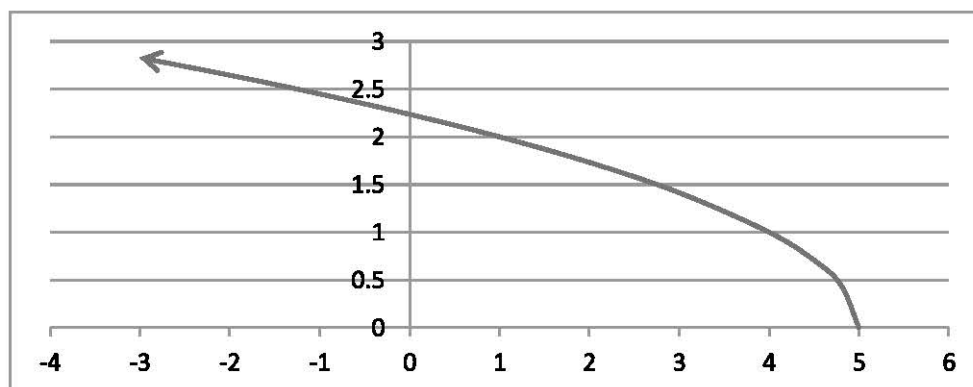


Figura 1.67

Ejemplo 2. (PROBLEMA) Una compañía arroja $D(t) = 0,7t^2 + 6t$ toneladas de desperdicios en el océano en el tiempo t días, con $0 \leq t \leq 16$. Muestre que la función es inyectiva.

Solución.

D es una función *Inyectiva* si cumple $\forall t_1, t_2 \in Dom(f)$ y $D(t_1) = D(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$.

Entonces, $\forall t_1, t_2 \in [0; 16] \wedge 0,7t_1^2 + 6t_1 = 0,7t_2^2 + 6t_2$

$$\Rightarrow 0,7 \left[t_1^2 + \frac{60}{7}t_1 + \left(\frac{30}{7}\right)^2 - \left(\frac{30}{7}\right)^2 \right] = 0,7 \left[t_2^2 + \frac{60}{7}t_2 + \left(\frac{30}{7}\right)^2 - \left(\frac{30}{7}\right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow 0,7 \left[\left(t_1 + \frac{30}{7}\right)^2 - \left(\frac{30}{7}\right)^2 \right] = 0,7 \left[\left(t_2 + \frac{30}{7}\right)^2 - \left(\frac{30}{7}\right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow 0,7 \left(t_1 + \frac{30}{7}\right)^2 - 0,7 \left(\frac{30}{7}\right)^2 = 0,7 \left(t_2 + \frac{30}{7}\right)^2 - 0,7 \left(\frac{30}{7}\right)^2 \Rightarrow 0,7 \left(t_1 + \frac{30}{7}\right)^2 = 0,7 \left(t_2 + \frac{30}{7}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(t_1 + \frac{30}{7}\right)^2 = \left(t_2 + \frac{30}{7}\right)^2 \Rightarrow t_1 + \frac{30}{7} = \pm \left(t_2 + \frac{30}{7}\right), \text{ pero como } 0 \leq t \leq 16$$

$$\Rightarrow t_1 + \frac{30}{7} = t_2 + \frac{30}{7} \Rightarrow t_1 = t_2.$$

Gráficamente, una función es inyectiva cuando al trazar rectas horizontales por toda la gráfica, esta es cortada en un punto como máximo. (Ver Figura 1.68).

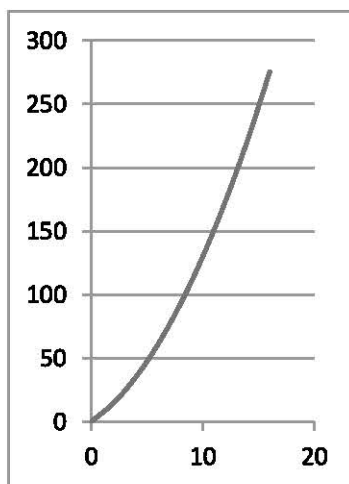


Figura 1.68

1.6. FUNCIÓN INVERSA

INVERSA DE UNA FUNCIÓN. Sea $f: A \rightarrow B$ una función real de variable real. Si f es inyectiva definimos la inversa de la función f como la nueva función, la cual se denota por f^* , del modo siguiente: $f^*: B \rightarrow A$, dada por $f^*(y) = x$.

Se cumple esta propiedad: $y = f(x) \Leftrightarrow f^*(y) = x$.

OBSERVACIONES:

- i) Para hallar la inversa de una función $y = f(x)$, se debe despejar la variable x ; en el resultado se intercambia x por y , así mismo y por x , lo cual finalmente da: $f^*(x) = y$.
- ii) La inversa de cualquier función no siempre es una función, puede ser solo relación binaria.
- iii) Cuando se grafican, la función dada f y su inversa f^* son simétricas con respecto a la función identidad: $y = x$.

A fin de tener una mejor idea de la función inversa, veamos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. (Ilustrando la función inversa). Sea T el conjunto de todos los triángulos, B el conjunto de todos los números positivos y f "el área". Así f liga a cada triángulo un único número positivo que representa su área. En este caso se observa que la función va de T a B , $f: T \rightarrow B$.

Pero, si tomamos la inversa de f , como $f^*: B \rightarrow T$, entonces se diría que f^* , es decir, la función inversa *liga a cada número positivo el área de algún triángulo*. Lo cual nos da la idea de función inversa.

Ejemplo 2. Encuentre la inversa de las siguientes funciones en sus respectivos dominios:

a) $f(x) = 2x - 3$

b) $g(x) = \frac{2x-3}{2-x}$

c) $h(x) = x^2 - 2x + 1$

Solución.

a) Escribimos $f(x) = 2x - 3$ en la forma $y = 2x - 3$.

Al despejar la variable x queda $x = \frac{y+3}{2}$, aquí se intercambia x por y , simultáneamente, y por x , lo que da como resultado: $y = \frac{x+3}{2}$ que ya es la función inversa y se escribe de la siguiente forma: $f^*(x) = \frac{x+3}{2}$.

Observamos que la función inversa también es una función real, puesto que f es inyectiva.

En efecto, si f es una función Inyectiva debe cumplir $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$ y $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Aplicado al ejemplo $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ y $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3 \Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$, implica que f es inyectiva en su dominio.

Grafiquemos ambas funciones: la $f(x) = 2x - 3$ con su inversa $f^*(x) = \frac{x+3}{2}$ en un mismo sistema de coordenadas. (Ver Figura 1.69).

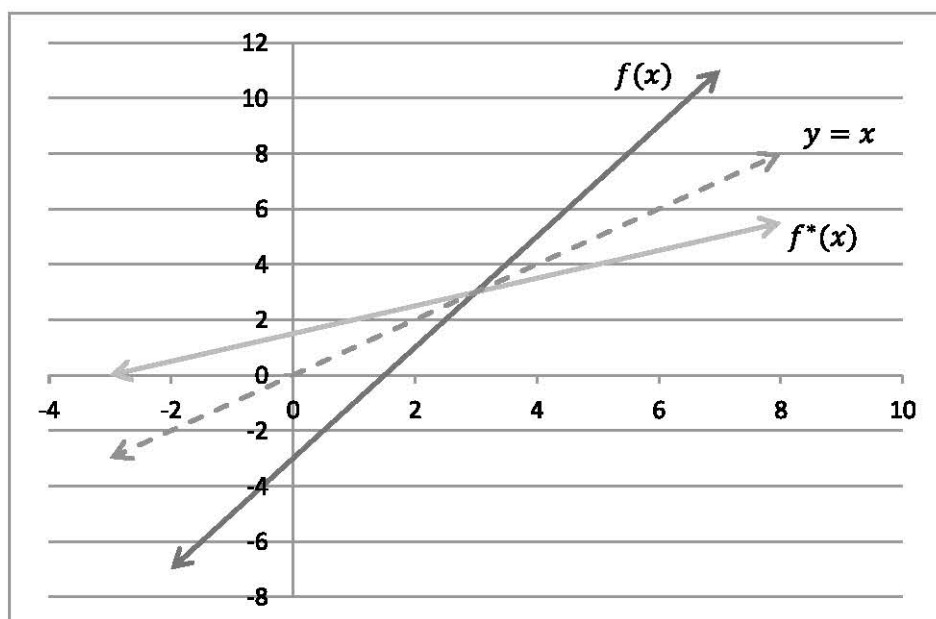


Figura 1.69

Puede verse que la función dada f y su inversa f^* son simétricas con respecto a la función identidad $y = x$.

b) Escribimos $g(x) = \frac{2x-3}{2-x}$ en la forma $y = \frac{2x-3}{2-x}$.

Al despejar la variable x resulta $x = \frac{2y+3}{2+y}$, luego se intercambia x por y , simultáneamente y por x , entonces se obtiene $y = \frac{2x+3}{2+x}$, lo cual ya es la función inversa y se escribe de la siguiente manera: $g^*(x) = \frac{2x+3}{2+x}$.

Observamos que la función inversa también es una función real, pues g es inyectiva.

En efecto, si g es una función inyectiva debe cumplir $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(g)$ y $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Aplicando al ejemplo $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{2\}$ y $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1-3}{2-x_1} = \frac{2x_2-3}{2-x_2} \Rightarrow (2x_1-3)(2-x_2) = (2x_2-3)(2-x_1) \Rightarrow 4x_1-2x_1x_2-6+3x_2 = 4x_2-2x_1x_2-6+3x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$, lo cual implica que g es inyectiva en su dominio.

En consecuencia, la función dada resulta ser $g(x) = \frac{2x-3}{2-x}$, su inversa es $g^*(x) = \frac{2x+3}{2+x}$.

c) Escribimos $h(x) = x^2 - 2x + 1$ en la forma $y = x^2 - 2x + 1$, con $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

Despejando la variable x , queda $x = 1 \pm \sqrt{y}$. Al intercambiar x por y , así como y por x , se llega a tener $y = 1 \pm \sqrt{x}$. Esta es la inversa de h que se escribe del modo siguiente: $h^*(x) = 1 \pm \sqrt{x}$; la cual no es una función, pues h no es inyectiva. Para cada x existe dos valores de y , con excepción de $x = 0$.

En la Figura 1.70, observamos que la función $y = h(x)$ no es inyectiva, una recta horizontal la cortaría en dos puntos.

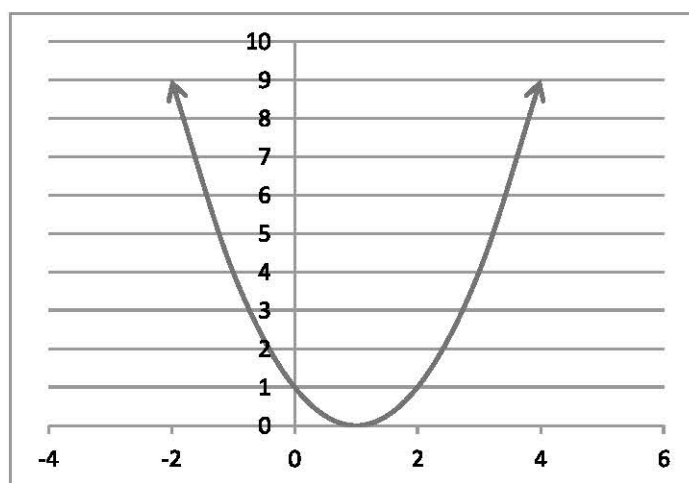


Figura 1.70

Ejemplo 3. Sea la función de costos en dólares $f(x) = 4x + 6$, donde x es el número de artículos producidos. Se entiende que “ f es la función que representa el costo para x artículos producidos”.

a) Construya una tabla para los seis primeros números enteros positivos.

x	0	1	2	3	4	...
C	6	10	14	18	22	...

Por ejemplo: para $x = 2$ artículos producidos, se tiene un costo de 14 soles.

b) Hállese la función inversa $f(x) = 4x + 6 \rightarrow y = 4x + 6 \rightarrow y - 6 = 4x \rightarrow x = \frac{y-6}{4}$.

Intercambiando variables: $y = \frac{x-6}{4} \rightarrow N(x) = \frac{x-6}{4}$.

Se entiende que “ N es la función que representa la cantidad de artículos producidos para x costo de producción”.

Una tabla para los seis primeros valores enteros será como sigue a continuación:

x	6	10	14	18	22	...
N	1	2	3	4	5	...

Por ejemplo: para $x = 14$ soles de costo, se tiene $N = 3$ artículos producidos.

c) Graficando ambas funciones en un mismo sistema de coordenadas. Dado que es una función de costos y de artículos producidos, entonces los dominios están formados por números positivos. (Ver Figura 1.71).

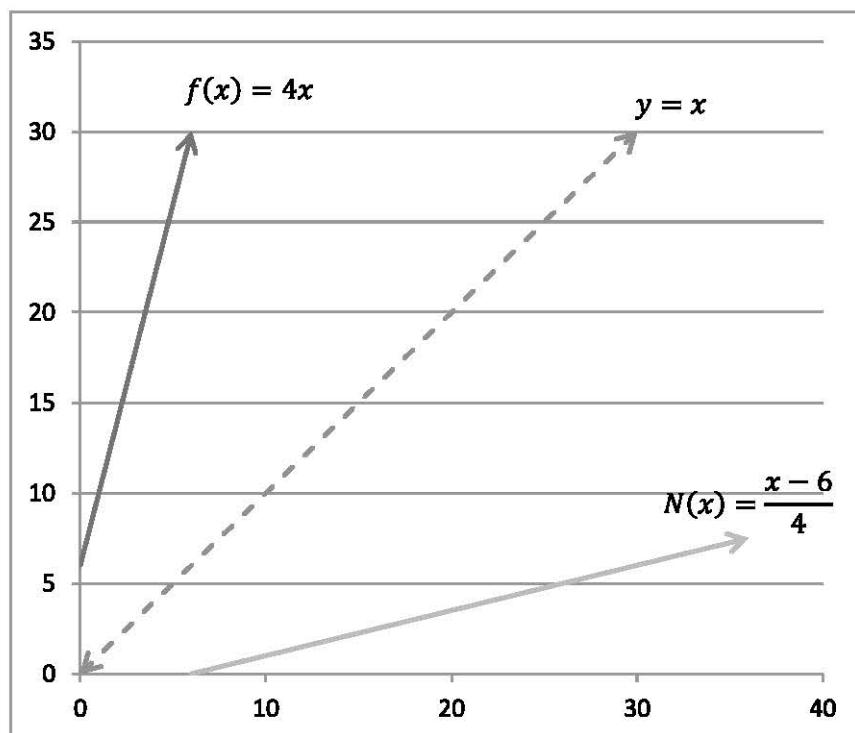


Figura 1.71

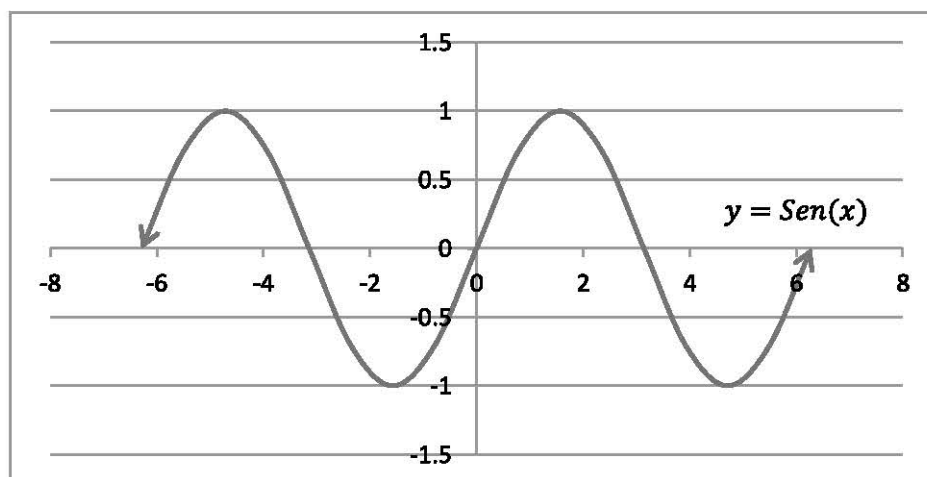
1.7. CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES REALES: CRECIENTE, DECRECIENTE, PAR, IMPAR Y PERIÓDICA

Esta es una clasificación distinta de las funciones reales, tomando como referencia la forma de la gráfica en dichas funciones.

LAS FUNCIONES SENO Y COSENO.

FUNCIÓN SENO. Es la que tiene como regla de correspondencia $f(x) = \text{Sen}(x)$. (Ver Figura 1.72)

Siendo el dominio y la imagen, respectivamente, $\text{Dom}(\text{Sen}) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(\text{Sen}) = [-1; 1]$.



FUNCIÓN COSENO. Es la que tiene como regla de correspondencia $f(x) = \cos(x)$. (Ver Figura 1.73).

Siendo el dominio y la imagen, respectivamente, $\text{Dom}(\cos) = \mathbb{R}$, $\text{Im}(\cos) = [-1; 1]$.

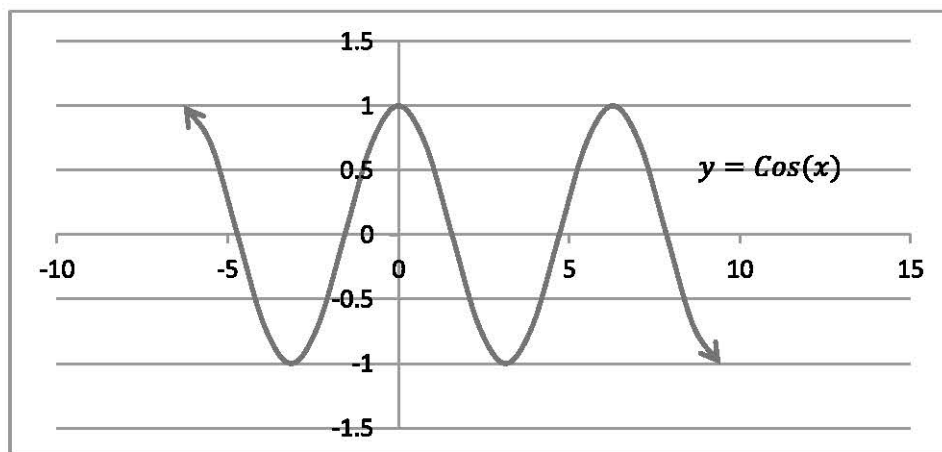


Figura 1.73

FUNCIONES PARES, IMPARES Y PERIÓDICAS.

FUNCIÓN PAR. f es una función par cuando cumple lo siguiente: Si $x \in \text{Dom}(f) \Rightarrow -x \in \text{Dom}(f)$ y además se tiene que $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$.

Gráficamente se caracterizan por ser simétricas con respecto al eje Y.

Ejemplo 1. La siguiente es una función par (Figura 1.74): $y = x^4 - 1$.

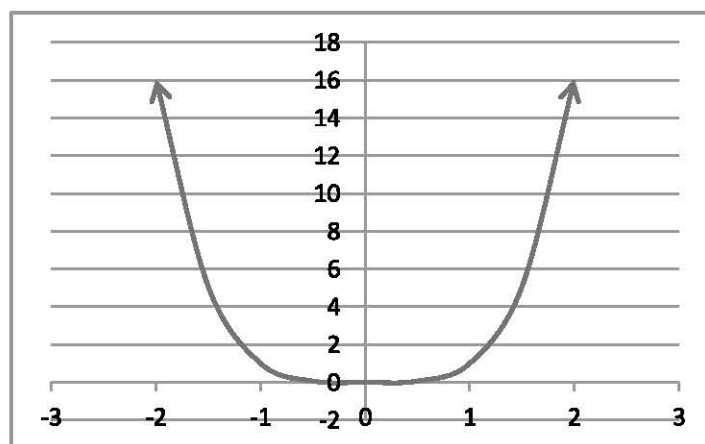


Figura 1.73

Cumple con la definición si $x \in \text{Dom}(f) \Rightarrow -x \in \text{Dom}(f)$ y además $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$.

Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

Asimismo, se tiene que $\forall x \in \mathbb{R}: x^4 - 1 = (-x)^4 - 1 \rightarrow x^4 - 1 = x^4 - 1$.

FUNCIÓN IMPAR. f es una función Impar cuando cumple lo siguiente: Si $x \in \text{Dom}(f) \Rightarrow -x \in \text{Dom}(f)$ y además se tiene que $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$.

Gráficamente se caracterizan por ser simétricas con respecto al origen de coordenadas.

Ejemplo 2. En la figura 1.75, se presenta la función impar $y = x^{1/3}$.

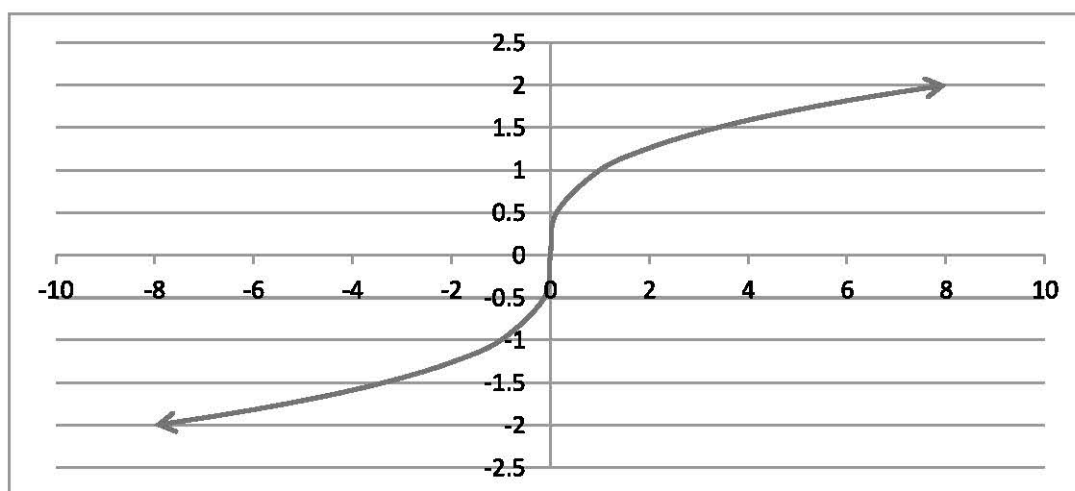


Figura 1.75

Cumple con la definición si $x \in \text{Dom}(f) \Rightarrow -x \in \text{Dom}(f)$ y además se tiene que $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$.

En efecto, si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$.

Así también se tiene que $\forall x \in \mathbb{R}: x^{1/3} = -(-x)^{1/3} \rightarrow x^{1/3} = x^{1/3}$.

FUNCIÓN PERIÓDICA. f es una función periódica cuando cumple lo siguiente: Si $x \in \text{Dom}(f) \Rightarrow x + p \in \text{Dom}(f)$ y además $f(x) = f(x + p)$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$.

Se caracterizan porque su gráfica se repite cada cierto intervalo o periodo p .

Ejemplo 3. La siguiente es una función periódica: $y = \cos(x)$.

Cumple con la definición:

Si $x \in \text{Dom}(f) \Rightarrow x + p \in \text{Dom}(f)$ y además $f(x) = f(x + p), \forall x \in \text{Dom}(f)$

Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x + p \in \mathbb{R}$.

Asimismo, tiene que $\forall x \in \mathbb{R}: \cos x = \cos(x + p) \rightarrow \cos x = (\cos x)(\cos p) - (\sin x)(\sin p)$

Entonces, $\cos p = 1 \Rightarrow p = 0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \dots$

y $\sin p = 0 \Rightarrow p = 0; \pm \pi; \pm 2\pi; 3\pi; \dots$

Luego, el periodo mínimo positivo es $p = 2\pi$. (Ver Figura 1.76).

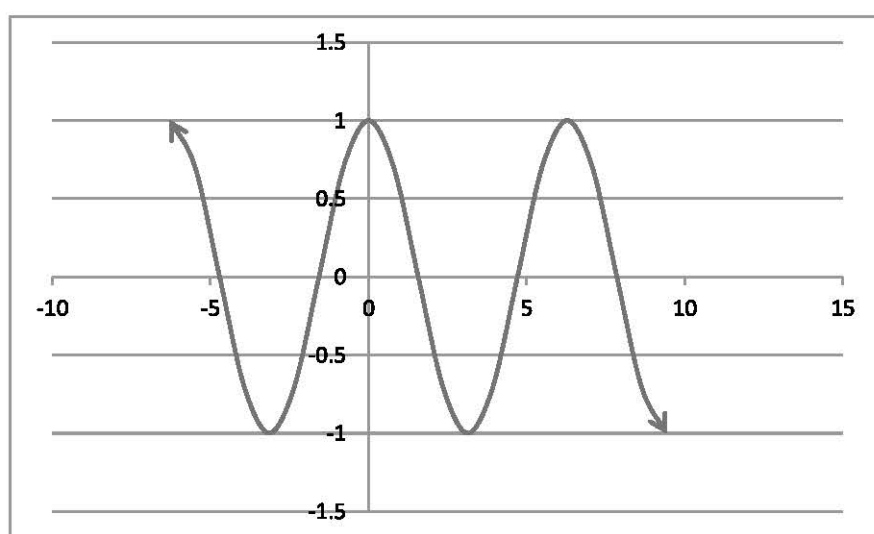


Figura 1.76

Ejercicio 1. Muestre que las siguientes funciones son pares:

- a) $f(x) = x^2$ b) $g(x) = 1 - |x|$ c) $h(t) = 2t^2 - t^4$ d) $R(t) = \cos(2t)$

Ejercicio 2. Muestre que las siguientes funciones son impares:

- a) $f(x) = x^3$ b) $g(t) = t^3 + t$ c) $G(t) = \sin(t)$ d) $h(t) = |x^2 - 1|$

Ejercicio 3. Muestre que las siguientes funciones son periódicas y halle su periodo.

- a) $f(x) = \sin(x)$ b) $g(x) = \cos(x)$ c) $h(x) = |\sin(x)|$

FUNCIONES MONÓTONAS (CRECIENTE O DECRECIENTE). Sea $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real definida en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces:

- i) f es una función monótona creciente si para todo x_1, x_2 de I con $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

ii) f es una función monótona estrictamente creciente si para todo x_1, x_2 de I con $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$.

iii) f es una función monótona decreciente si para todo x_1, x_2 de I con $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

iv) f es una función monótona estrictamente decreciente si para todo x_1, x_2 de I con $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$.

Nota. El hecho de que una función sea creciente o decreciente se puede observar en la gráfica de cada función.

Ejemplo 1. La siguiente es una función creciente: $y = x^2, x \geq 0$. Figura 1.77

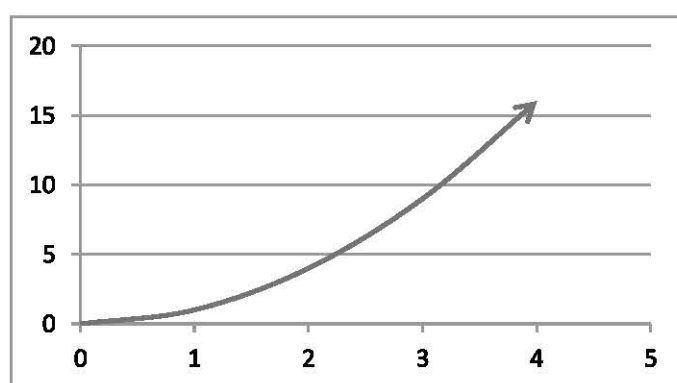


Figura 1.77

Cumple con la definición f es una función monótona creciente:

Si para todo x_1, x_2 de I con $x_1 < x_2$ se cumple que $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Si para todo $x_1, x_1 + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ de $[0; +\infty)$ se tiene que $x_1 < x_1 + \varepsilon$.

Se cumple $x_1^2 \leq (x_1 + \varepsilon)^2 \rightarrow x_1^2 \leq x_1^2 + 2\varepsilon x_1 + \varepsilon^2$ y como $2\varepsilon x_1 + \varepsilon^2$ siempre es positivo, entonces esta desigualdad, en definitiva, siempre es cierta.

Es más, en este caso se cumple también $x_1^2 < (x_1 + \varepsilon)^2 \rightarrow x_1^2 < x_1^2 + 2\varepsilon x_1 + \varepsilon^2$ y como $2\varepsilon x_1 + \varepsilon^2$ siempre es positivo, entonces esta desigualdad resulta ser siempre verdadera,

Con lo cual esta función $y = x^2, x \geq 0$ es estrictamente creciente.

Ejemplo 2. La siguiente es una función decreciente: $y = 2 - x^2, x \geq 0$.

Cumple con la definición f es una función monótona decreciente si para todo x_1, x_2 de I con $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Este hecho puede ser verificado como en el caso anterior. (Ver Figura 1.78).

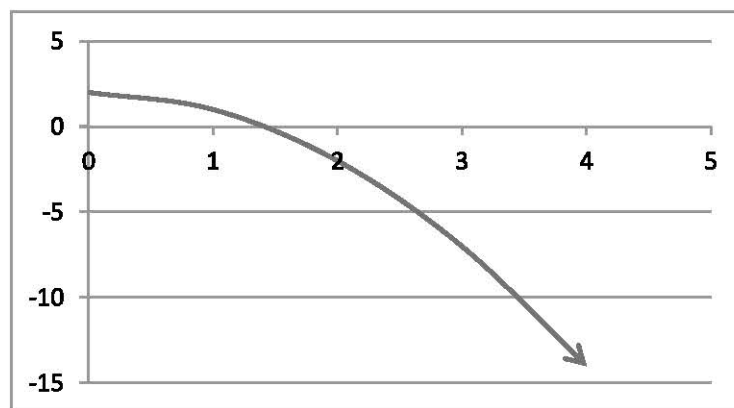


Figura 1.78

Ejemplo 3. Determinar los intervalos donde las funciones dadas son crecientes, estrictamente crecientes, decrecientes o estrictamente decrecientes.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x^2 & \text{b) } g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty; 2] \\ x + 2, & x \in (2; 5) \\ 7, & x \in [5; +\infty) \end{cases} & \text{c) } h(x) = \frac{1}{x} \end{array}$$

Solución.

(a) Obsérvese la gráfica de la función (Figura 1.79): $f(x) = (x - 2)^2$.

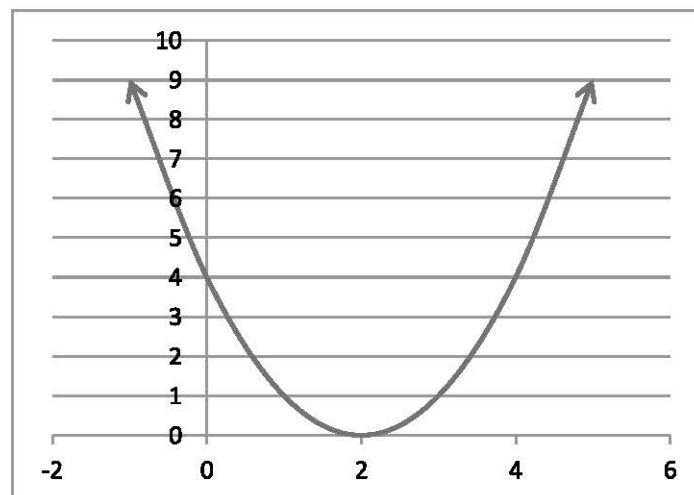


Figura 1.79

Se ve que es (estrictamente) decreciente en el intervalo $I = (-\infty; 2)$

Así también es (estrictamente) creciente en el intervalo $J = (2; +\infty)$

(b) Obsérvese la gráfica de la función en la Figura 1.80: $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-\infty; 2] \\ x + 2, & x \in (2; 5) \\ 7, & x \in [5; +\infty) \end{cases}$

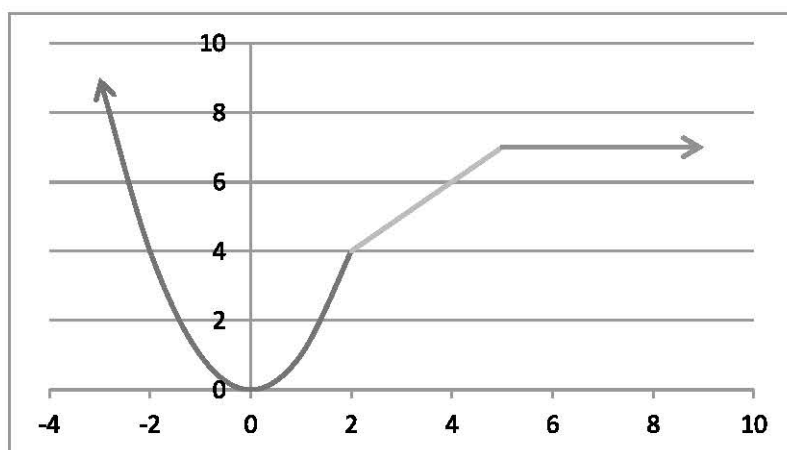


Figura 1.80

Se advierte que es (estrictamente) decreciente en el intervalo $I = \langle -\infty; 0 \rangle$

También que es creciente en el intervalo $J = \langle 0; +\infty \rangle$

Pero es (estrictamente) creciente en el intervalo $K = \langle 0; 5 \rangle$

(c) Obsérvese en la Figura 1.81, la gráfica de la función $h(x) = \frac{1}{x}$.

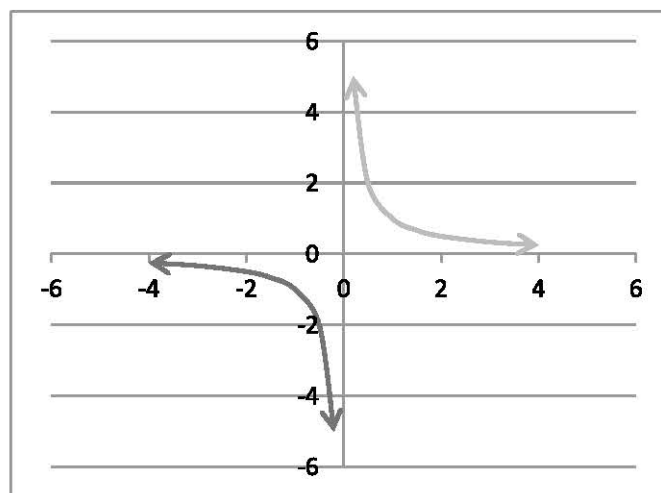


Figura 1.81

Se percibe que es (estrictamente) decreciente en el intervalo $I = \langle -\infty; 0 \rangle$ y en el intervalo $J = \langle 0; +\infty \rangle$.

Ejemplo 4. (Función utilidad). Si la utilidad $P(x)$ en dólares para una salida de x unidades se calcula mediante la función $P(x) = -\frac{x^2}{30} + 200x - 7200$, con $x > 0$. Determine los niveles de producción para los cuales P es creciente y los niveles para los que P es decreciente.

Solución.

Graficando la función dada, se observa lo siguiente:

- a) Es creciente en el intervalo $[0; 3000]$. Esto significa que la utilidad es creciente en este intervalo.
- b) Decreciente en el intervalo $[3000; 5000]$. Es decir, la utilidad es decreciente en este intervalo. (Ver Figura 1.82).

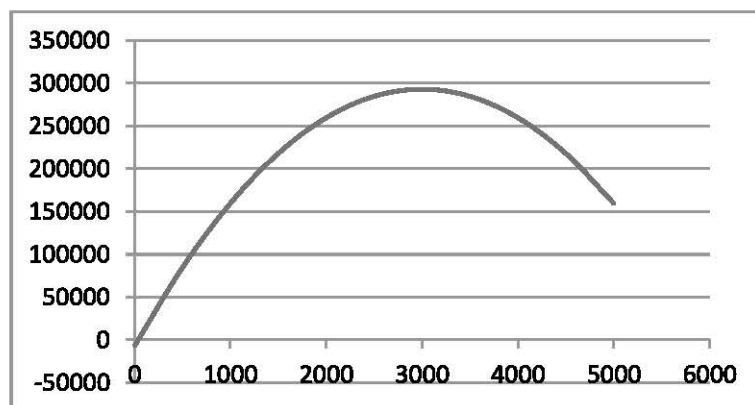


Figura 1.82

Ejemplo 5. (Ritmo del pulso). Una persona que mide x pulgadas de altura tiene un ritmo de pulso de y pulsaciones por minuto, calculadas aproximadamente con la fórmula $y = 590x^{-1/2}$, $30 \leq x \leq 75$. En el intervalo que se indica, ¿el ritmo de pulso es creciente o decreciente?

Solución.

Al graficar la función dada, se observa que es decreciente en el intervalo $[30; 75]$.

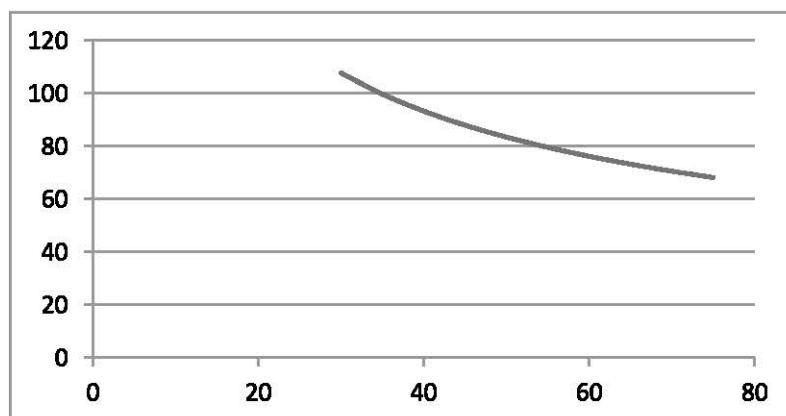


Figura 1.83

1.8. FUNCIONES TRASCENDENTES: EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.

Cuando en la regla de correspondencia la variable independiente aparece formando parte del exponente.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f_a(x) = a^x$ o $f(x) = a^x$ Con base $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$	$Dom(f_a) = \mathbb{R}$	$Im(f_a) = \mathbb{R}^+$	$Gra(f_a)$, depende de la función.

PROPIEDADES: La función exponencial cumple con todas las propiedades de las leyes de los exponentes. Veamos algunas de ellas:

$$1. f(x+z) = f(x) \cdot f(z) \quad \rightarrow \quad a^{x+z} = a^x \cdot a^z$$

$$2. f(x-z) = \frac{f(x)}{f(z)} \quad \rightarrow \quad a^{x-z} = \frac{a^x}{a^z}$$

$$3. [f(x)]^z = f(xz) \quad \rightarrow \quad (a^x)^z = a^{xz}$$

OBSERVACIÓN 1. Toda función exponencial f_a cumple con:

- $Dom(f_a) = \mathbb{R}$ - Es sobreyectiva - $Im(f_a) = \mathbb{R}^+$ - Es inyectiva

- f es estrictamente decreciente cuando $0 < a < 1$.

- f es estrictamente creciente cuando $a > 1$.

Nota. Cuando la base es $e=2.7182818\dots$, entonces se tiene $f(x) = e^x$.

Ejemplo 1. Construir la gráfica de las funciones exponenciales que se piden.

a) Cuando $a = \frac{1}{2}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ o $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. (Ver Figura 1.84).

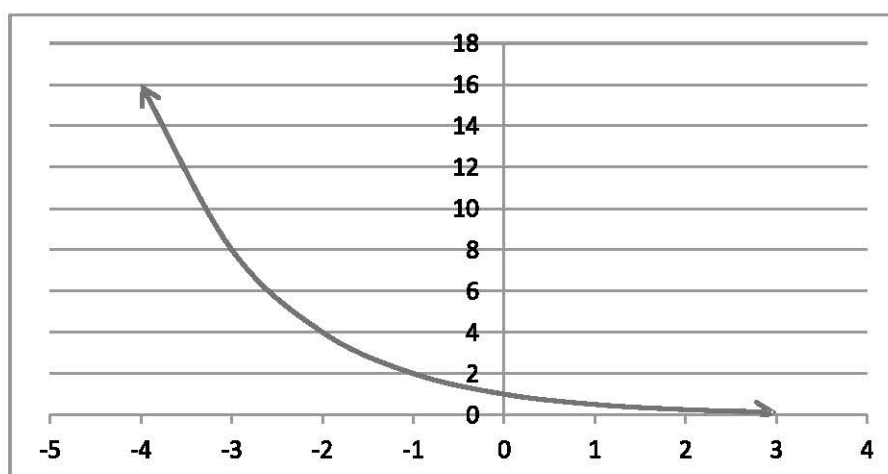


Figura 1.84

b) Cuando $a = 2$, $f(x) = 2^x$ o $y = 2^x$. (Ver Figura 1.85).

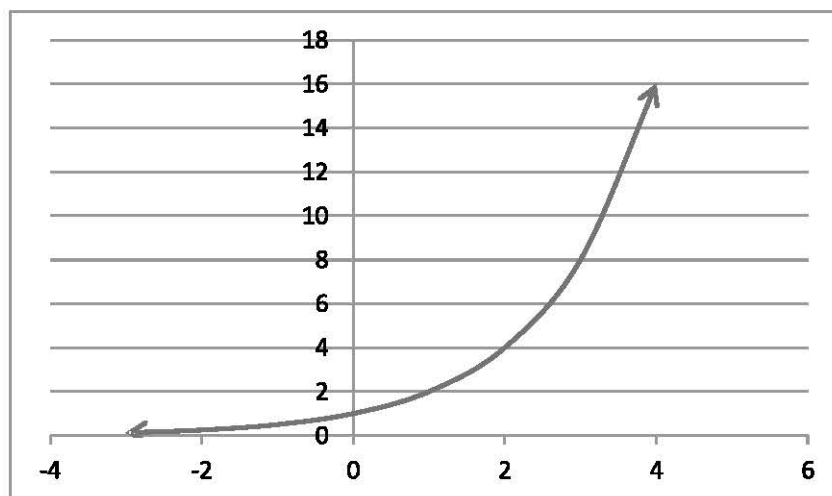


Figura 1.85

OBSERVACIÓN 2. En general la función exponencial tiene otras formas en las que puede aparecer configurando operaciones combinadas, como se mostrará en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2. (PROBLEMA) Una sola bacteria de cólera se divide cada media hora para producir dos bacterias completas. Si se empieza teniendo 100 bacterias, en t horas (suponiendo un medio de cultivo adecuado) se tendrá $B = (100)2^{2t}$ bacterias.

a) Graficar la función B para $0 \leq t \leq 3$.

b) Calcular el número de bacterias para cuando $t = 1$ hora, $t = 1,5$ horas y $t = 2,5$ horas.

Solución.

Se hace una tabulación para el intervalo $0 \leq t \leq 3$ de $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$. (Ver Figura 1.86).

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(t)$	100	200	400	800	1600	3200	6400

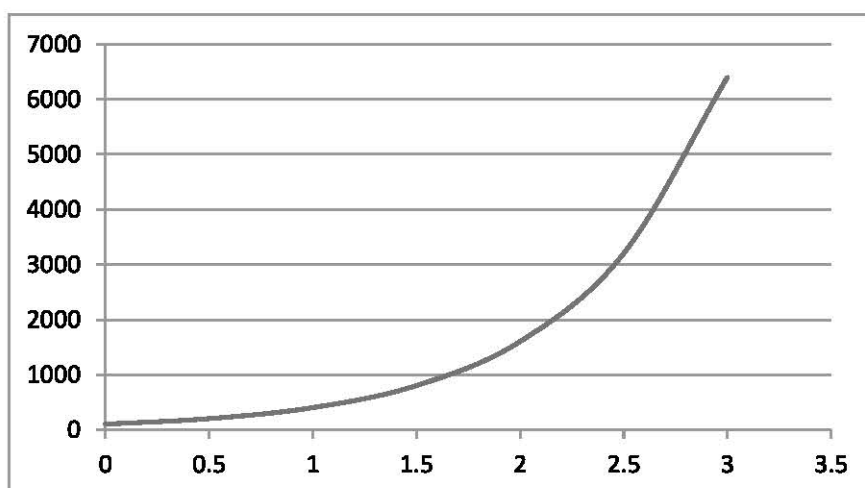


Figura 1.86

El valor $B(1) = 400$ significa que al transcurrir una hora de iniciado el experimento se han formado 400 nuevas bacterias.

El valor $B(1,5) = 800$ da a entender que al pasar una hora y media de iniciado el experimento se han formado 800 nuevas bacterias.

El valor $B(2,5) = 3200$ significa que tras dos horas y media de iniciado el experimento, ya se han formado 3200 nuevas bacterias.

Ejemplo 3. (PROBLEMA) Los registros de capacidad de cierta persona que aprende a digitar un teclado se obtienen, aproximadamente, de la fórmula $N(t) = 100(1 - e^{-0,1t})$, donde N es el número de palabras digitadas por minuto y t es el número de semanas de aprendizaje.

- Graficar la función N para $0 \leq t \leq 40$.
- Calcular el número de palabras para $t = 5$ semanas, $t = 15$ semanas, $t = 35$ semanas y $t = 40$ semanas.
- Qué tendencia observa usted en la gráfica cuando el tiempo avanza.

Solución. Haga una tabulación de 5 en 5 para graficar y luego interprete lo que se pide. (Ver Figura 1.87).

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40
f(t)	0	39,35	63,21	77,69	86,47	91,79	95,02	96,98	98,17

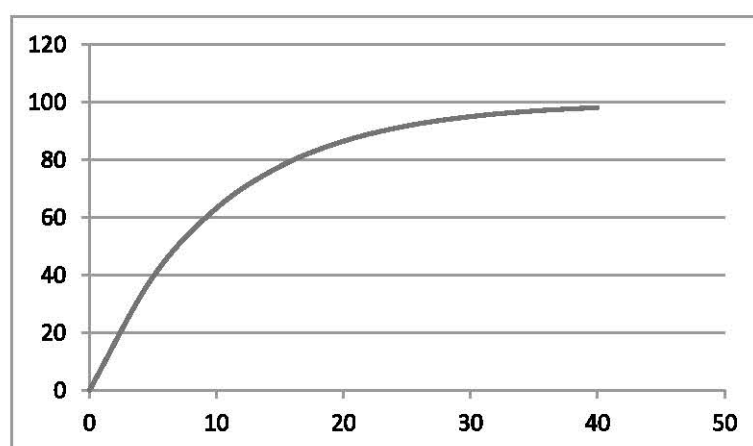


Figura 1.87

El valor $N(5) = 39,35$ significa que al pasar cinco semanas de iniciado el experimento se ha registrado 39,35 palabras digitadas.

El valor $N(15) = 77,69$; es decir, cuando han pasado quince semanas de iniciado el experimento se registró 77,69 palabras digitadas.

El valor $N(35) = 96,98$ da a entender que a las treinta y cinco semanas de iniciado el experimento, se ha registrado 96,98 palabras digitadas.

El valor $N(40) = 98,17$ significa que al transcurrir cuarenta semanas de iniciado el experimento se registró 98,17 palabras digitadas.

LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = \text{Log}_a x$ Con base $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$	$\text{Dom}(\text{Log}_a) = \mathbb{R}^+$	$\text{Im}(\text{Log}_a) = \mathbb{R}$	$\text{Gra}(f)$, depende de la función.

DEFINICIÓN. Sea la función exponencial $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f_a(x) = a^x$ para $a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$. Llamaremos Función Logarítmica en base "a" a la función inversa de f_a , $f_a^* : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_a^*(x) = \text{Log}_a(x) = y$ si y solamente si $x = a^y$. Es decir, $\text{Log}_a(x) = y \Leftrightarrow$ si $x = a^y$.

PROPIEDAD: $\text{Log}_a(x) = y \Leftrightarrow$ si $x = a^y$.

OBSERVACIÓN. En una función logarítmica se cumple lo siguiente:

- $\text{Dom}(\text{Log}_a) = \mathbb{R}^+$ - Es sobreyectiva - $\text{Im}(\text{Log}_a) = \mathbb{R}$ - Es inyectiva
- f es estrictamente decreciente cuando $0 < a < 1$.

- f es estrictamente creciente cuando $a > 1$.

PROPIEDADES: La función logarítmica cumple con todas las propiedades de los logaritmos. Veamos algunas de ellas:

$$1. f(xz) = f(x) + g(z) \quad \rightarrow \quad \text{Log}(xz) = \text{Log}(x) + \text{Log}(z)$$

$$2. f\left(\frac{x}{z}\right) = f(x) - g(z) \quad \rightarrow \quad \text{Log}\left(\frac{x}{z}\right) = \text{Log}(x) - \text{Log}(z)$$

$$3. f(x^k) = kf(x) \quad \rightarrow \quad \text{Log}(x^k) = k \text{Log}(x)$$

Nota. Cuando la base es $e = 2.7182818\dots$, entonces $f(x) = \text{Log}_e(x)$ o $f(x) = \text{Ln}(x)$, llamada función logaritmo natural.

Ejercicio 1. Construir la gráfica de las funciones logarítmicas que se piden.

a) Cuando $a = \frac{1}{2}$: $f(x) = \text{Log}_{1/2}(x)$ o $y = \text{Log}_{1/2}(x)$. (Ver Figura 1.88).

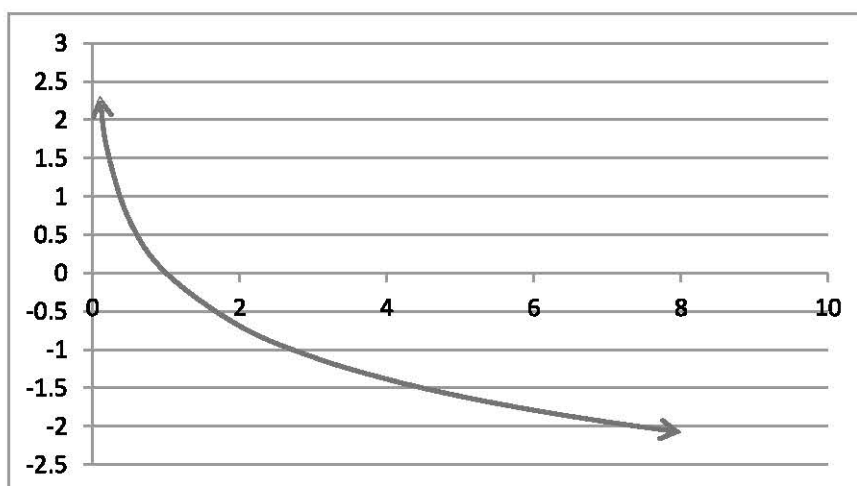


Figura 1.88

b) Cuando $a = 2$, $f(x) = \text{Log}_2(x)$ o $y = \text{Log}_2(x)$. (Observar la Figura 1.89).

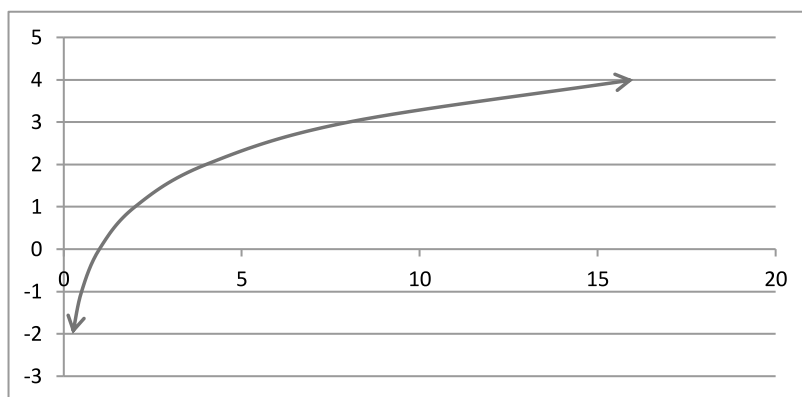


Figura 1.89

c) $f(x) = \ln(x)$. (Ver Figura 1.90).

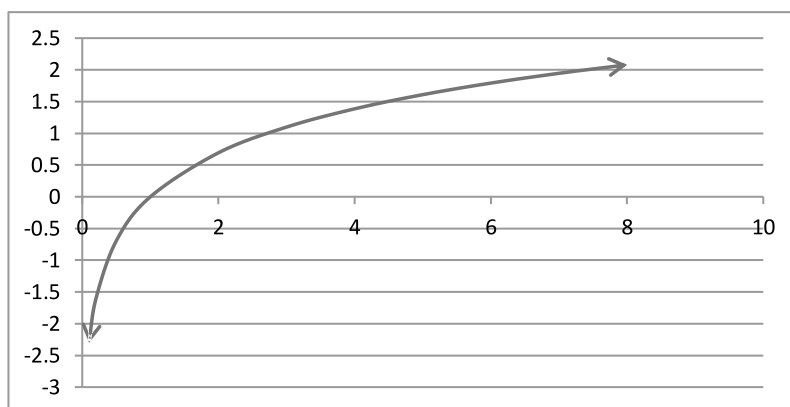


Figura 1.90

OBSERVACIÓN. En sentido general, la función logarítmica tiene otras formas en que puede aparecer configurando operaciones combinadas, tal como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 4. (PROBLEMA) En la acústica se ha determinado que la sensación de volumen que produce un sonido en el oído humano es una función logarítmica de intensidad. La intensidad se mide en watts por metro cuadrado. El sonido audible más débil (apenas audible) tiene intensidad $I_0 = 10^{-12} \text{ watts/m}^2$. El volumen de un sonido se mide en decibeles, con el supuesto que un sonido de intensidad I_0 tiene 0 decibeles. Si un sonido tiene intensidad I , entonces el volumen del sonido está dado por $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$.

a) Hallar el volumen en decibeles del sonido de una banda de rock que está ubicada a 100 metros del estrado si en ese lugar el sonido tiene intensidad de $10^{-5} \text{ watts/m}^2$.

b) Calcular la intensidad de un sonido de volumen igual a 60 decibeles.

Solución.

(a) Usando $L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \rightarrow L = 10\log\left(\frac{10^{-5}}{10^{-12}}\right) \rightarrow L = 70$ decibels de volumen.

Se entiende que a 100 metros de distancia un sonido de intensidad $10^{-5} \text{ watts/m}^2$ produce un volumen de 70 decibels.

(b) Usamos $L = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right) \rightarrow 60 = 10\log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right) \rightarrow I = 10^{-6} \text{ wattspor m}^2$ de intensidad.

Quiere decir que a 100 metros de distancia un volumen de 60 decibels es producido por un sonido de $I = 10^{-6} \text{ wattspor m}^2$ de intensidad.

Ejemplo 5. (PROBLEMA) La magnitud M de un sismo en la escala de Richter es dada por $M = 0,6\log(0,37E) + 1,46$; donde E es la energía del sismo, medida en kilowatts hora. Encuentre la energía de un sismo de magnitud 7.

Solución.

Usamos $M = 0,6\log(0,37E) + 1,46$. Reemplazando $M = 7$ y despejando E , así:

$$7 = 0,6\log(0,37E) + 1,46 \rightarrow E = \frac{10^{5,54/0,67}}{0,37} \rightarrow E = 5,017110^8 \text{ kwh.}$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

FUNCIÓN SENO. (Ver Figura 1.91).

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = \text{Sen}(x)$	$\text{Dom}(\text{Sen}) = \mathbb{R}$	$\text{Im}(\text{Sen}) = [-1; 1]$	$\text{Gra}(f)$, depende de la función.

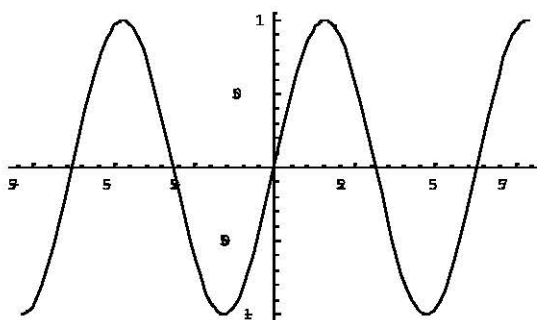


Figura 1.91

FUNCIÓN COSENO. (Ver Figura 1.92).

Regla de correspondencia	Dominio	Imagen	Gráfica
$f(x) = \text{Cos}(x)$	$\text{Dom}(\text{Cos}) = \mathbb{R}$	$\text{Im}(\text{Cos}) = [-1; 1]$	$\text{Gra}(f)$, depende de la función.

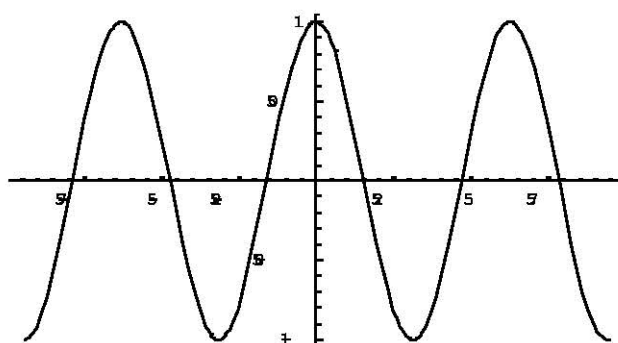


Figura 1.92

FUNCIÓN TANGENTE. (Ver Figura 1.93).

Regla de correspondencia	Dominio e imagen	Gráfica
$f(x) = \text{Tan}(x)$	$\text{Dom}(\text{Tan}) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x = (2n-1)(\pi/2), n \in \mathbb{N}\}$	$\text{Gra}(f)$, depende de la función.
	$\text{Im}(\text{Tan}) = \mathbb{R}$	

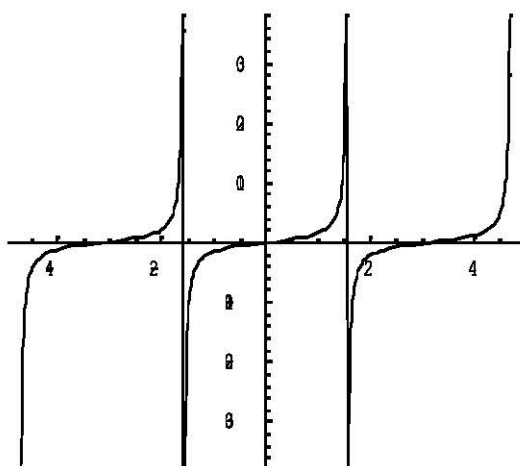


Figura 1.93

FUNCIÓN COTANGENTE. (Ver Figura 1.94).

Regla de correspondencia	Dominio e imagen	Gráfica
$f(x) = \text{Tan}(x)$	$\text{Dom}(\text{Cot}) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x = n\pi, n \in \mathbb{N}\}$	$\text{Gra}(f)$, depende de la función.
	$\text{Im}(\text{Cot}) = \mathbb{R}$	

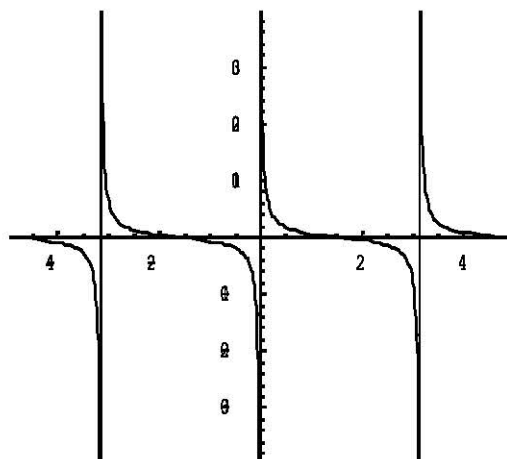


Figura 1.94

FUNCIÓN SECANTE. (Ver Figura 1.95).

Regla de correspondencia	Dominio e imagen	Gráfica
$f(x) = \text{Sec}(x)$	$\text{Dom}(\text{Sec}) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x = (2n + 1)(\pi/2), n \in \mathbb{N}\}$	$\text{Gra}(f)$, depende de la función.
	$\text{Im}(\text{Sec}) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x < 1\}$	

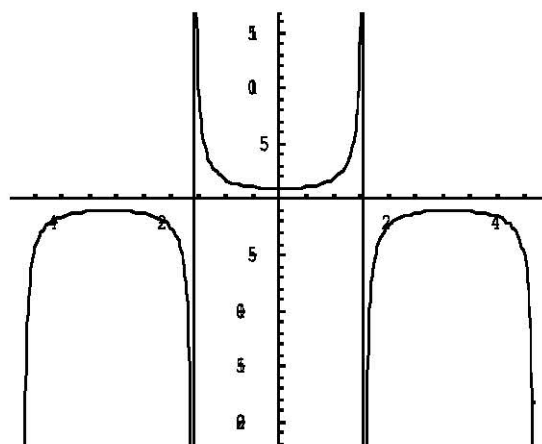


Figura 1.95

FUNCIÓN COSECANTE. (Ver Figura 1.96).

Regla de correspondencia	Dominio e imagen	Gráfica
$f(x) = \text{Csc}(x)$	$\text{Dom}(\text{Csc}) = \{x \in \mathbb{R} / x = n\pi, n \in \mathbb{N}\}$	$\text{Gra}(f)$, depende de la función.
	$\text{Im}(\text{Csc}) = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / x < 1\}$	

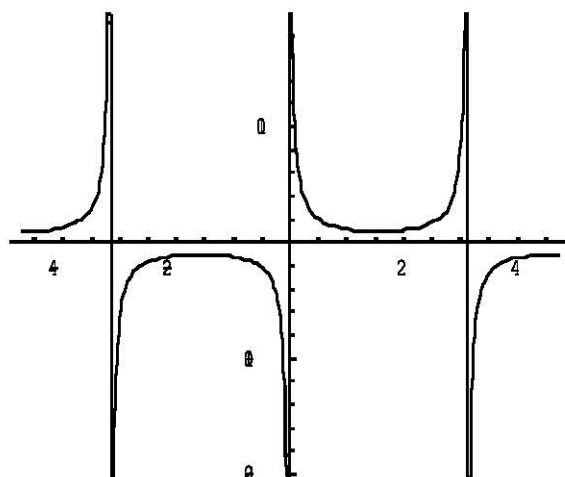


Figura 1.96

1.9. FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

DIFERENCIA ENTRE UN PROBLEMA REAL Y UN MODELO MATEMÁTICO.

Un problema de aplicación es el planteamiento de un hecho o suceso con la intención de darle una representación matemática y, posteriormente, una solución matemática. Puede ser de solución fija o de solución variable.

a) PROBLEMA DE SOLUCIÓN FIJA.

Problema de aplicación. Se ha talado los $\frac{7}{8}$ de la madera de un bosque. Se reforesta 38 hectáreas (ha) y el bosque queda cubierto en sus $\frac{3}{5}$ partes. Calcular el área total del bosque en ha.

Modelo matemático. Siendo x la incógnita que representa el área total del bosque y usando los datos dados, se llega a tener el siguiente modelo: $\frac{1}{8}x + 38 = \frac{3}{5}x$.

Solución. La solución fija es dada por $x = 80$ ha.

b) PROBLEMA DE SOLUCIÓN VARIABLE.

Problema de aplicación. Una empresa fabrica puertas de diferentes anchos y alturas. Se desea calcular el área de dichas puertas sabiendo que las medidas de ancho y altura deben sumar 2,8 m y el ancho no debe ser menor de 0,65 m. Hallar la función que modele este hecho e indicar el área para una puerta cuyo ancho es 0,80 m. Así también, determinar el ancho para el cual el área es máxima.

Solución. Se muestra el esquema del problema:

o		
	$A = xy$	x
y		

Modelo matemático. La función que permite tener las diversas áreas de las puertas es $A(x) = 2,8x - x^2$ en m^2 , con dominio lógico $0,65 \leq x \leq 2,15$. Los pasos (que son cuatro) para llegar a este modelo se verán luego.

Nótese que este modelo sirve para calcular áreas de puertas de diversas anchuras, y tiene solución variable. En seguida se presenta una gráfica del modelo matemático.

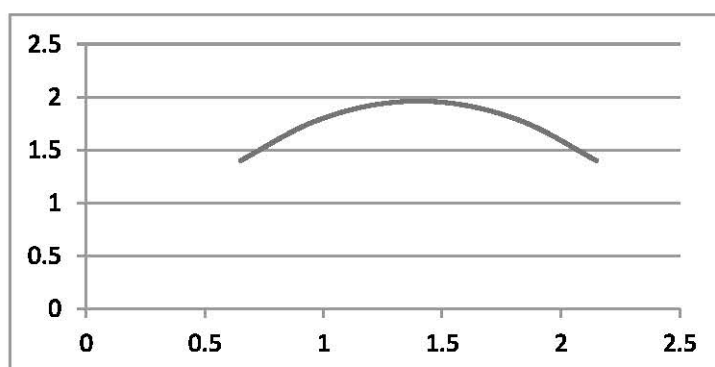


Figura 1.97

La solución particular es $A(0,80) = 1,6 m^2$. El ancho para el cual el área es máxima será de $A(1,4) = 1,96 m^2$.

Cada punto de la gráfica es de la forma $(x; A)$, donde x representa el ancho de cada puerta y A representa su área o superficie. (Ver Figura 1.97).

Nota. Un modelo matemático es una función obtenida a partir de hechos, sucesos o situaciones concretas.

Son cuatro los pasos que se siguen en la resolución de un problema real:

- i) Se asigna letras o variables a las cantidades (magnitudes) dadas y a aquellas por determinar (incógnitas). De ser posible, se hace un esquema del problema.
- ii) Se escribe una *ecuación primaria* para la magnitud que va a representar la función pedida, la cual será llamada variable dependiente.
- iii) Se formula *ecuaciones secundarias* que permitan transcribir la ecuación primaria en otra que tenga una sola variable independiente.
- iv) Se determina el "Dominio Lógico" de la ecuación primaria; es decir, el dominio para el cual la función tenga sentido real.

Finalmente, se expresa la función $y = f(x)$ con su respectivo dominio $Dom(f)$.

PROBLEMA 1. Se va a cercar un terreno rectangular de perímetro 100 m. Expresar el área como función de la longitud de uno de sus lados. Hallar el área máxima y la longitud para la cual ocurre.

Solución.

Apliquemos los cuatro pasos anteriores. En un rectángulo:

i) A =área; p =perímetro; y =largo; x =ancho.

ii) La ecuación primaria va por el área $A = xy$

iii) La ecuación secundaria: $P = 2x + 2y \rightarrow 100 = 2x + 2y \rightarrow y = 50 - x$

Reemplazando en la ecuación primaria: $A = 50x - x^2$ o $A(x) = 50x - x^2$.

iv) Como x e y son longitudes de un terreno, $x > 0$, $y > 0$.

Pero si $y > 0 \rightarrow 50 - x > 0 \rightarrow x < 50$, de donde $0 < x < 50$ que es el dominio lógico.

La función con su dominio lógico será $A(x) = 50x - x^2$ con $0 < x < 50$.

Cada punto de la gráfica es de la forma $(x; A)$, donde x representa el ancho del rectángulo y A representa su área o superficie.

A continuación, en la Figura 1.98 se muestra la gráfica de este modelo.

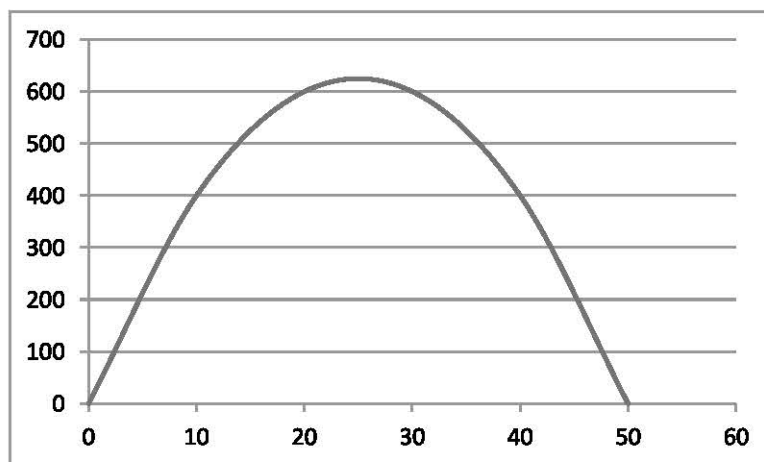


Figura 1.98

Como el modelo es una función cuadrática, hallando el vértice se determinará el área máxima y la longitud para la cual ocurre. Ver la teoría de la función cuadrática.

En efecto, $A(x) = 50x - x^2 \rightarrow A(x) = -[x^2 - 50x + 25^2 - 25^2]$

$\rightarrow A(x) = -[(x - 25)^2 - 625] \rightarrow A(x) = -(x - 25)^2 + 625$

Se observa que el máximo es $A = 625 \text{ m}^2$ y ocurre cuando la longitud del ancho es de 25 m.

PROBLEMA 2. Una compañía renta equipos de cómputo y tiene 150 disponibles. El dueño sabe que podrá rentarlos todos a S/. 50 cada uno por semana, pero que un equipo dejará de rentarse por cada aumento de S/. 2 en la renta semanal. Expresa el ingreso del dueño como función de una variable apropiada.

Solución.

i) Sean $x = n^\circ$ de equipos rentados $y = n^\circ$ de equipos no rentados

$I_p =$ Ingreso por equipo

$I =$ Ingreso total.

ii) Ecuación primaria: $I = (x)(I_p)$

iii) Ecuaciones secundarias: $x + y = 150$ o $y = 150 - x$

$$I_p = 50 + 2y$$

Reemplazando y en I_p : $I_p = 350 - 2x$

En la ecuación primaria $I = x(350 - 2x) \rightarrow I = 350x - 2x^2$ o $I(x) = 350x - 2x^2$.

iv) El dominio lógico prácticamente es $0 \leq x \leq 150$.

La función Ingreso con su dominio será $I(x) = 350x - 2x^2$ con $0 \leq x \leq 150$.

Cada punto de la gráfica es de la forma $(x; I)$, donde x representa el número de equipos rentados e I simboliza el ingreso total correspondiente. (Ver Figura 1.99).

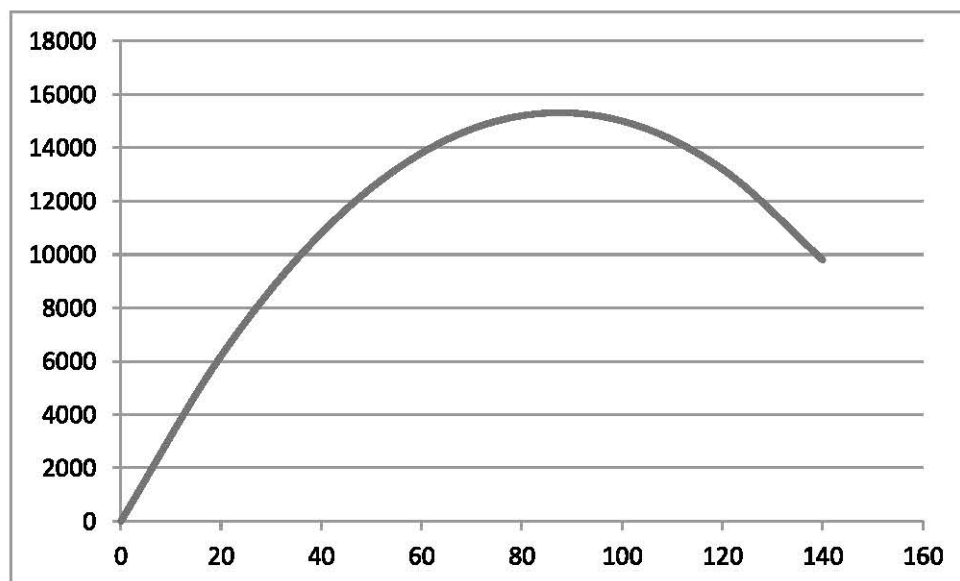


Figura 1.99

PROBLEMA 3. Una droguería ha descubierto que puede vender 10 000 unidades de cierto medicamento al mes, a un precio de \$15 la unidad; pero únicamente 8 000 si el precio unitario es de \$20.

a) Expresar el precio como una función del número de unidades vendidas, suponiendo que la relación es lineal. Interpretar para $x = 6\,000$.

b) Si sus costos fijos son de \$5 000 y los de mano de obra ascienden a \$8, hallar el costo, ingreso y beneficio como funciones de las ventas. Interprete para $x = 12\,000$.

Solución parte (a).

i) $y =$ Precio; $x =$ Unidades vendidas.

ii) Ecuación primaria. Relación lineal $y = y(x)$ conociendo dos puntos:

$$(x_1; y_1) = (10\,000; 15), (x_2; y_2) = (8\,000; 20)$$

iii) Ecuación secundaria: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$

Usando los puntos conocidos se tiene $y = 40 - \frac{x}{400}$ o $f(x) = 40 - \frac{x}{400}$

iv) Dominio lógico: $x \geq 0$; $y \geq 0$, pero si $y \geq 0 \rightarrow 40 - \frac{x}{400} \geq 0 \rightarrow x \leq 16\,000$, de donde $x \leq 16\,000$.

La función con su dominio queda expresada por $f(x) = 40 - \frac{x}{400}$ con $x \leq 16\,000$.

Piden además interpretar $f(6\,000) = 25$, quiere decir que cuando la droguería vende 6 000 unidades de dicho medicamento es porque el precio es de \$25 la unidad.

Solución parte (b)

Siendo: $C(x) =$ Costo ; $R(x) =$ Ingreso; $P(x) =$ Beneficio

Ecuaciones respectivas:

La función de Costo total = Costo Fijo + Costo Variable $\rightarrow C(x) = 5\,000 + 8x$

La función de Ingreso = n° de unidades por el precio; luego $R(x) = 40x - \frac{x^2}{400}$

La función de Beneficio = Ingreso - Costo; luego $P(x) = 32x - \frac{x^2}{400} - 5\,000$

El dominio para las tres funciones es $0 \leq x \leq 16\,000$.

Piden además interpretar:

$C(12\,000) = 101\,000$, se entiende que cuando la droguería produce 12 000 unidades, el costo para su producción es de \$101 000.

$R(12\ 000) = 120\ 000$, quiere decir que si la droguería vende 12 000 unidades, el ingreso por las ventas es de \$120 000.

$P(12\ 000) = 19\ 000$, lo cual denota que cuando la droguería vende 12 000 unidades, el beneficio obtenido por las ventas es de \$19 000.

PROBLEMA 4. El dueño de una clínica de 50 habitaciones privadas tiene una ganancia de \$4.00 con cada habitación ocupada por día, pero pierde \$1,00 por habitación vacía.

a) Expresa la ganancia diaria como una función del número de cuartos ocupados.

b) Halle e interprete para el caso de $x = 25$ habitaciones ocupadas.

Solución.

a) Expresar la ganancia como función.

i) Sean G = Ganancia.

x = n° de habitaciones ocupadas.

y = n° de habitaciones no ocupadas.

\$4 = Ganancia por habitación ocupada.

\$1 = Pérdida por habitación no ocupada.

ii) Ecuación primaria: $G = 4(x) - 1(y)$

iii) Ecuaciones secundarias: $x + y = 50 \rightarrow y = 50 - x$.

Reemplazando y en la ecuación primaria: $G = 5(x - 10)$ o $G(x) = 5(x - 10)$

iv) El dominio lógico es $[0; 50]$.

La función con su dominio queda como $G(x) = 5(x - 10)$ con $x \in [0; 50]$.

Cada punto de la gráfica es de la forma $(x; G)$ donde x representa el número de habitaciones ocupadas y G , la ganancia correspondiente. (Ver Figura 1.100).

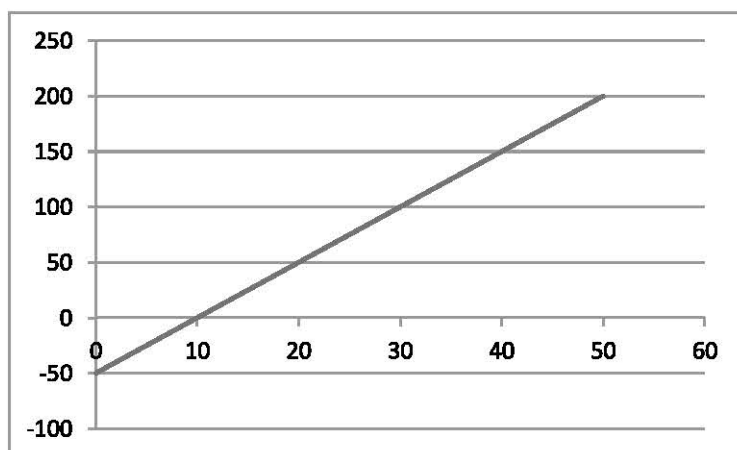


Figura 1.100

b) Se calcula $G(25) = 5(25 - 10) = 75$ dólares.

Esto significa que cuando hay 25 habitaciones ocupadas, se tendrá una ganancia de 75 dólares.

1.10. LISTADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

FUNCIÓN: DOMINIO, IMAGEN Y GRÁFICA.

1. Determinar cuáles de las siguientes relaciones son funciones reales:

a) $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / x \rightarrow y = x^2$

b) $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y^2 + x = 5$

c) $G = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \sqrt{4 - x^2}\}$

d) $G = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / |y| = |x + 2|\}$

2. Desarrollar según se pide:

a) Si $f(x) = x^2 - 10x + 6$; calcular $f(-4)$, $f(0)$, $f(3)$, $f(-2x)$.

b) Dada la función $f(x - 1) = 2x^2 - 3x + 1$, hallar $f(x + 1)$.

3. Graficar las siguientes funciones e indicar dominio e imagen:

a) $f(x) = \sqrt{3 - x}$

b) $g(x) = 40x - x^2$

c) $H(x) = 1 + \frac{x}{3}, x \leq 0$.

d) $R(t) = 200 + 25t, 4 \leq t \leq 32$.

4. Graficar la ecuación de costos $C(x) = 5\,000 + 2x$, para $0 \leq x \leq 8\,000$.

5. Graficar la ecuación de ingresos $R(x) = 300x - x^2$, para $0 \leq x \leq 9\,000$.

6. Graficar: a) $y = x^3 - 4x$

b) $y = 4x(x^2 + 1)$

c) $y = 2 + \frac{1}{x-3}$

d) $y = 0,1(x - 3)^2 - 100$

7. Graficar las siguientes funciones:

a) $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - 2}$

b) $h(t) = \sqrt{6 - 3t}, -2 \leq t \leq 10$

c) $f(x) = |2x - x^2|$

d) $g(x) = \sqrt{|3x - 5|}$

e) $f(x) = \llbracket x^2 + 1 \rrbracket$

f) $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

g) $h(x) = (x - 2)^2 - 1$

CLASES DE FUNCIONES. FUNCIONES ELEMENTALES.

1. Construya la recta que pasa por los puntos (1; 1) y (8; 3).
2. Hallar y graficar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1; 3) con pendiente $m = -2$.
3. a) Hallar el valor máximo de la función $f(x) = 6x - x^2$. Grafique la función para $-1 \leq x \leq 6$.
- b) Hallar el valor mínimo de la función $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$. Grafique la función para $-5 \leq x \leq 2$.
4. Un equipo de oficina se deprecia linealmente y su valor se calcula mediante la función $D(t) = 30\,000 - 1\,500t$.
 - a) Determine el valor del equipo después de 5 años, luego de 10 años e interprete.
 - b) Construya la gráfica para $0 \leq t \leq 20$.
 - c) ¿Cuál fue el valor del equipo cuando era nuevo?
 - d. Halle la pendiente e indique su significado en el contexto de este problema.
5. El costo de la fabricación de " x " pares de patines, si los costos fijos son \$550 por día y los costos variables son \$70 por par de patines fabricados. Grafique dicha función e interprete para tres valores.
6. La gerencia de una empresa que fabrica juguetes deportivos tiene costos fijos (cero salidas) de \$200 por día y costos totales de \$1 400 por día para una salida diaria de 20 unidades. Determine la recta y gráfiquela para $0 \leq x \leq 20$.
7. Un animal pesa 10 libras al nacer y 15 un mes después. Elabore la función que rige este suceso. ¿Cuánto pesará el animal en 1 año si la relación edad-peso es una ecuación lineal?
8. Una compañía estima sus ingresos mediante la función: $R(p) = 400p - 25p^2$, siendo " p " el precio con $0 \leq p \leq 120$, en dólares.
 - a. Calcular el ingreso para $p = 30$, $p = 60$ y $p = 90$ e interpretar cada caso.
 - b. Hallar el ingreso máximo y el precio en el cual se da.
9. Si una persona aprende " y " cosas en " x " horas, calculadas mediante la fórmula $y = 50\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 9$.
 - a) Construya la gráfica de $y = f(x)$.
 - b) Calcule $f(1)$, $f(4)$, $f(7)$, $f(9)$ e interprete cada caso.

OPERACIONES CON FUNCIONES. COMPOSICIÓN DE FUNCIONES.

1. Para las funciones $f(x) = 3 - 5x$, $g(x) = 4x + 7$:

a) $(f + g)(x)$ y su dominio.

b) $(f \cdot g)(x)$ y su dominio.

c) $(f \div g)(x)$ y su dominio.

2. Un fabricante estima que su costo promedio $\bar{C}(x)$ por par de patines a un nivel de salida de "x" millares es $\bar{C}(x) = (2x - 8)^2 + 25$ en dólares.

a) Calcular $\bar{C}(2)$, $\bar{C}(4)$, $\bar{C}(6)$ e interpretar cada caso.

b) Graficar $\bar{C}(x)$ para $0 \leq x \leq 9$.

3. Una empresa tiene como ecuación de demanda a $x = 9\,000 - 30p$, siendo "p" el precio por unidad, su ecuación de costos es $C(x) = 72\,000 + 60x$. La ecuación de ingresos se obtiene de $R = xp$, finalmente la ecuación de beneficio es $P = R - C$.

a) Exprese el costo como una función lineal del precio.

b) Señale el ingreso como una función cuadrática del precio.

c) Halle la función de beneficio.

4. Suponga que se tiene la ecuación de demanda $x = f(p) = 16\,000 - 30p$, donde $x = f(p)$ es el número de unidades vendidas a S/. p cada una. Observe que a medida que el precio sube, el número de unidades que se vende disminuye.

a. Suponga además que la demanda es afectada por un incremento del 15 por ciento. Señale la nueva función demanda y calcule otra para cuando $p = 250$ soles y $p = 350$ soles.

b. Imagine ahora que la demanda es afectada por una reducción del 20 por ciento. Exprese esta nueva función demanda y determine otra para cuando $p = 250$ soles y $p = 350$ soles.

c. Calcule la demanda original para $p = 250$ soles y $p = 350$ soles y compare estos resultados con los obtenidos en (a) y (b).

d. Grafique las tres funciones en un mismo sistema de coordenadas para $0 \leq p \leq 400$.

5. Un hombre que pesa 300 libras se pone a dieta y pierde 3 libras por semana. Otro que pesa 130 libras lleva una dieta rica en alimentos sanos y proteínas, por lo que gana 4 libras por semana. Construya la función que rige este hecho. ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que los dos hombres tengan el mismo peso?

6. Encontrar las funciones compuestas $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$ para:

a) $f(x) = x^3$ y $g(x) = x + 2$

b) $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 4$

7. Figure que, durante el verano, el número de insectos en el instante “ t ” se modela mediante la función $N(t) = 2t^2 + 1$ (millones). Si la población de pájaros se estima en $P(N) = 3N + 2$, donde N es el número (millones) de insectos presentes, aplique la idea de la composición para expresar la población de pájaros como una función del tiempo.

8. Se estima que la población de una ciudad para los próximos 10 años está dada mediante la relación $N(t) = 50\,000 + 300t$ (t en años), en tanto que el índice promedio de contaminación para dicha ciudad se representa por $P(N) = \sqrt{10 + \frac{N}{1000}}$. Determine la función compuesta $P[N(t)]$. Calcule e interprete $N(0)$, $P(50\,000)$. Así también: $P[N(5)]$, $P[N(8)]$, $P[N(10)]$.

TRANSFORMACIONES DE UNA FUNCIÓN REAL.

1. Realice las traslaciones horizontales (a la izquierda y a la derecha) en la función $f(x) = 4x - x^2$, tomando como valor de referencia $c = 4$.
2. Ejecute las traslaciones verticales (hacia arriba y hacia abajo) en la función $f(x) = 4x - x^2$, con $c = 4$ como valor de referencia.
3. Realice el alargamiento vertical de la función $f(x) = 4x - x^2$, tomando como valor de referencia $c = 1/2$.
4. Efectúe la reducción vertical de la función $f(x) = 4x - x^2$ con $c = 2$ como valor de referencia.

FUNCIÓN INYECTIVA, SOBREYECTIVA Y BIYECTIVA.

1. Sea la función $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = \frac{4}{x^2+2}$; determinar si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.
2. Sea la función $f: R \rightarrow \langle 0; 2 \rangle$ definida por $f(x) = \frac{4}{x^2+2}$; determinar si es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

FUNCIÓN INVERSA.

1. Determine la inversa de la función $f(x) = (x + 1)^2$ con $x \in \langle -\infty; -1 \rangle$ e indique si se trata o no de una función. Grafique ambas en un mismo sistema de coordenadas.
2. Para cada una de las siguientes funciones que sea inyectiva, encuentre su inversa en términos de x :
 - a. $f(x) = 7 - 2x$
 - b. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
 - c. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES: CRECIENTE, DECRECIENTE, PAR, IMPAR Y PERIÓDICA.

- 1) Para las funciones $f(x) = 3 - 5x$, $g(x) = 4x + 7$:

a. Señale si f es creciente o decreciente.

b. Decidir si f es par, impar o periódica.

2. Grafique las siguientes funciones e indique en qué intervalo es creciente y/o decreciente:

a. $f(x) = \sqrt{3-x}$

b. $g(x) = 40x - x^2$

c. $H(x) = 1 + \frac{x}{3}, x \leq 0.$

d) $R(t) = 200 + 25t, 4 \leq t \leq 32.$

FUNCIONES TRASCENDENTES: EXPONENCIALES, LOGARÍTMICAS Y TRIGONOMÉTRICAS.

1. Realizar la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = 3^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

c) $y = \text{Log}_4(x)$

d) $f(x) = 50(1 - e^{-0,2t}), t \leq 0.$

2. En 1970, la población mundial era de 3 500 millones. Desde entonces ha crecido a una tasa de 1,8% (0,018) al año. Calcular y dar una interpretación de la población en los años 1980 ($t=10$) y 1990. La función es $P(t) = P_0 e^{rt}$, donde P_0 es la población inicial y r es la tasa de crecimiento. Si la tasa aún persiste, hallar la población durante los años 2010 y 2012.

3. Si se deposita hoy \$ 375 en el banco, identifique la función que vincula el capital con el interés. Además, ¿cuánto se tendrá al cabo de 2 años si el interés es de 9,5% y se capitaliza en la forma que se especifica a continuación?:

a) Anualmente. b) Bimestralmente. c) Mensualmente. d) Continuamente.

El *interés simple* es dado por $A = P + Prt$, donde A = Cantidad a obtener en el tiempo t , P = Capital inicial, r = Tasa anual, t = Tiempo en años.

El *interés compuesto* es dado por $A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$, cuando el interés se compone n veces al año; donde A = Cantidad a obtener en el tiempo t , P = Capital inicial, r = Tasa anual, t = Tiempo en años.

El *interés continuo* es dado por $A = Pe^{rt}$, donde A = Cantidad a obtener en el tiempo t , P = Capital inicial, r = Tasa anual, t = Tiempo en años.

4. En una ciudad de 10 000 habitantes, dos personas inician un rumor que alcanza a 25 personas al finalizar el día, ¿cuántas lo conocen al final del tercer día, si este rumor se propaga mediante $N(t) = \frac{10\,000}{1+4999(0,08)^t}$? Interprete su resultado.

5. Usar la función dada para el volumen $L = 10 \text{Log} \left(\frac{I}{I_0}\right)$ a fin de evaluar la intensidad de un sonido de volumen igual a 60 decibeles.

FUNCIONES COMO MODELOS MATEMÁTICOS. PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

1. Cuando la agencia para la protección del ambiente de los Estados Unidos descubrió que cierta compañía descargaba ácido sulfúrico en el río Mississippi, la multó con 12 000 dólares, más 1 000 dólares diarios hasta que dicha compañía cumpliera con la reglamentación federal de contaminación del agua. Expresé la multa total como una función del número total de días que la compañía continuó violando las reglas federales.

2. El costo de producción de muñecas para la compañía CUPIDO es de $C(x) = 0,1x^2 - 0,2x + 600$ dólares para una producción diaria de " x " muñecas. El número de muñecas producidas, transcurridas " t " horas de la jornada, es $x = 50t - 10$. Expresé el costo de producción " C " como una función de " t ". Determine el costo de producción de una jornada de 8 horas e interprete.

3. Cuando se introduce una solución de acetilcolina en el músculo del corazón de una rana, disminuye la fuerza con que el músculo se contrae. Los datos de los experimentos de A. J. Clark se pueden aproximar bastante por medio de una función de la forma $R(x) = \frac{100x}{b+x}$, $x \leq 0$, donde " x " es la concentración de acetilcolina (en las unidades apropiadas); " b ", una constante positiva que depende de la rana en particular; y $R(x)$, la respuesta del músculo a la acetilcolina, que se expresa como un porcentaje del efecto máximo posible de la droga.

a. Si $b = 20$, halle la respuesta del músculo si $x = 60$. Luego, interprete este resultado.

b. Determine el valor de b si $R(50) = 60$ (60%).

4. La velocidad V del torrente sanguíneo, en cm por segundo a " x " centímetros del centro de una determinada arteria, se obtiene de $V = f(x) = 1,28 - 20000x^2$ para $0 \leq x \leq 8(10)^{-3}$. Calcule e interprete $f(0)$, $f(0,004)$ y $f(0,002)$.

5. Una persona mide " x " pulgadas de altura y tiene un pulso de " y " pulsaciones por minuto, cuantificados aproximadamente con la fórmula $y = 590x^{-1/2}$, con $30 \leq x \leq 75$. Además se sabe que $y = f(x)$. Calcule e interprete $f(36)$, $f(45)$, $f(52)$ y $f(64)$. Asimismo, halle la inversa y cuantifique para algunos valores de su variable.

6. El área de una herida que cicatriza se determina con $A(t) = 2t^{-2}$, $1 \leq t \leq 10$, donde " t " está en días. Calcular e interpretar $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$, $A(5)$, $A(8)$ y $A(10)$.

7. El cerebro de un bebé es proporcional al peso de su cuerpo. Si un bebé pesa 3,5 kg y tiene un cerebro de 420gr, establezca la función que rige este hecho para cualquier peso. Además, determine cuánto pesa el cerebro de un bebé de 4 kg y halle la función inversa.

8. Se ha determinado que la población de zancudos en el instante t , durante el verano en que se siembra arroz, se modela por $f(t) = 2t^2 + 1$ miles de zancudos. Si el verano inicia el 1 de enero y finaliza el 30 de abril, determinar:

a. El número de zancudos al inicio del verano.

b. El número de zancudos a los 20, 50 y 80 días después que inició el verano.

c. Precisar el dominio y rango lógicos para este modelo.

d. Graficar para $0 \leq t \leq 120$.

9. El costo en cientos de dólares al fabricar x centenares de tarros de leche para adultos se modela por la función $C(x) = 3 + 10x - x^2$, $0 \leq x \leq 4$.

a. Calcular el costo promedio que se define como el cociente $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$.

b. Graficar las funciones de costo y de costo promedio en un mismo sistema de coordenadas.

10. Una empresa que vende equipos de cómputo determinó que su utilidad total es establecida por $T(x) = 0,08x^2 + 80x + 260$ dólares, siendo x el número de unidades vendidas. Ahora suponga que x está en función del tiempo t en meses, donde $x(t) = 4t + 3$. Halle $T[x(t)]$ e interprete para $t = 2$ y luego para $x = 5$.