Capítulo II

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES

CAPÍTULO II

LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES REALES

CONTENIDO

2.1. DEFINICIóN NO FORMAL DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL. OPERACIONES CON LÍMITES

NOCIONES PRELIMINARES.

¿En qué se diferencia el álgebra del cálculo?

El álgebra estudia la matemática en forma estática; por ejemplo, en esta rama de la matemática se resuelve ecuaciones para hallar valores particulares fijos de una variable. En cambio, el cálculo se ocupa de la matemática en su forma dinámica, cómo el cambio en una variable afecta a otra variable.

Son problemas del cálculo:

- Calcular la pendiente m de una curva en un punto cualquiera.
- Hallar la recta tangente L_T a una curva en un punto cualquiera.
- Hallar la velocidad de un móvil en un instante dado.
- Calcular el límite de una función $y = f(x)$ cuando x tiende a un valor fijo x_0.
- La razón de cambio instantáneo de un suceso con respecto al tiempo.
- La curvatura de una curva en un punto cualquiera.
- El valor máximo de una función que describe una trayectoria.
- La dirección de movimiento de una curva, etc.

OBSERVACIÓN El estudio del cálculo diferencial parte desde el límite de una función real, luego la continuidad de la función real, la derivada de una función real y finalmente aplicaciones de la derivada.

El límite de una función real se debe entender como el acercamiento de una variable independiente x a un valor fijo x_0, luego ver lo que sucede con la variable dependiente y en la función $y = f(x)$.

La continuidad de una función real $y = f(x)$ debe ser entendida, intuitivamente, como la no interrupción de los puntos que constituyen la gráfica de dicha función real.

La derivada de una función real es la variación de la función $y = f(x)$ con respecto a su variable independiente x, la cual actúa como una unidad de medida.

Las aplicaciones de la derivada son definidas como la resolución de problemas que tengan vinculación con la *variación de la función* con respecto a una magnitud dada. Dependiendo del área al que pertenezca el problema, dicha variación tiene distintos significados: Pendiente de una recta, velocidad de un móvil, razón de cambio de un suceso, tasa de natalidad, índice de consumo, magnitudes marginales en administración...

El LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL.

La idea de límite se usa para describir el comportamiento de una función $y = f(x)$ en acercamientos de la variable independiente x hacia un valor fijo x_0, sobre todo en aquellas funciones en las cuales se tiene la sospecha de que no se comporta como se espera.

Para ver ideas preliminares de lo que es el límite de una función real, veamos un ejemplo:

INTRODUCCIÓN. Sea la función $f: R \to R$ definida por $f(x) = \frac{x^2}{2}$, intentemos determinar lo que sucede con $y = f(x) = \frac{x^2}{2}$ cuando nos acercamos desde x al valor $x_0 = 2$, es decir, calcular $L = \lim_{x \to 2} f(x)$, lo cual se entiende como identificar el valor al que se aproxima la función f en el eje Y, cuando x se acerca al valor $x_0 = 2$ en el eje X.

Calculemos: $L = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{2^2}{2} = 2.$

La función $f(x) = \frac{x^2}{2}$ se acerca como límite al valor $L = 2$ en el eje Y, cuando x se aproxima al valor $x_0 = 2$ en el eje X, tal como se observa en la Figura 2.1.

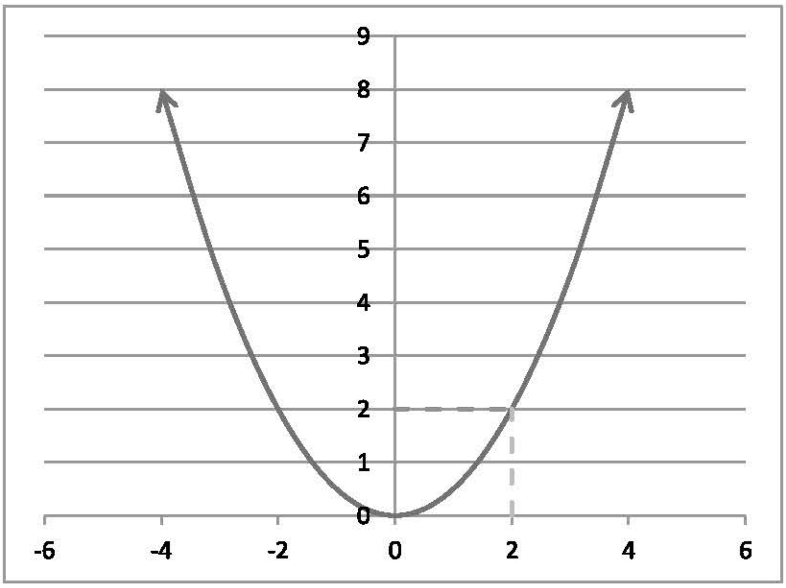

Figura 2.1

Del mismo modo se puede calcular más límites en tanto nos acercamos a otros valores x_0:

i) $\lim_{x \to 0} f(x) = L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{0^2}{2} = 0$

ii) $\lim_{x \to -2} f(x) = L = \lim_{x \to -2} \left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{(-2)^2}{2} = 2$

iii) $\lim_{x \to 2,5} f(x) = L = \lim_{x \to 2,5} \left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{(2,5)^2}{2} = 3,125$

DEFINICIÓN NO FORMAL DE LÍMITE. Sea $f: I \subset R \rightarrow R$ una función real definida en el intervalo I y sea $x_0 \in I$ un número real. Se dice que L es el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a x_0, si y solo si los valores de $f(x)$ se acercan al valor límite L. Este hecho se denota de la siguiente manera:

$$\underset{x \to x_0}{Lím} f(x) = L.$$

OBSERVACIÓN 1.

a) En la expresión $\underset{x \to x_0}{Lím} f(x) = L$ se debe entender que cuando x se cerca a x_0 $(x \to x_0)$, la función $f(x)$ tiende al valor L, es decir, $f(x) \to L$.

b) Si $y = f(x)$ no se orienta a ningún valor L cuando x tiende a x_0, se dice que el límite de f no existe en x_0.

c) Formalmente se exige que el punto x_0 sea un punto de acumulación; no obstante, en el conjunto de los números reales todo punto es punto de acumulación, por lo que en adelante se toma en cuenta esta exigencia, aunque no se la mencione.

d) El límite L puede existir para $y = f(x)$, aunque $y = f(x)$ no esté definida en x_0.

e) Cuando el valor límite L existe, este es único.

OBSERVACIÓN 2. Calcular un límite es una de las formas "más cuidadosas" de evaluar alguna función para un valor x_0; se trata del acercamiento cuidadoso por valores x hasta llegar a x_0.

La definición no formal ayuda en el cálculo de límites de una función real, los cuales pueden obtenerse de dos formas:

a) Por reemplazo directo al sustituir el valor x_0 en la función dada $y = f(x)$ y en donde se halla el valor límite L, en este caso se cumple que $L = \underset{x \to x_0}{Lím} f(x) = f(x_0)$.

b) Si por reemplazo directo no se puede hallar el valor límite, al querer sustituir el valor x_0 en la función dada $y = f(x)$, se llega a una forma indeterminada que puede ser alguna de las siguientes: $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \infty - \infty, 1^{\infty}, \frac{\infty}{0}, \infty^0$, entre otros casos.

Una *forma indeterminada* siempre puede ser resuelta y encontrarse el valor del límite L, como se verá más adelante.

Ejemplo 1. Véanse los siguientes límites por reemplazo directo en los que no hay dificultad en calcular el límite solicitado:

a) Siendo $f(x) = 10 - 2x$, calcular $\quad L = \underset{x \to 3}{Lím} (10 - 2x) = 10 - 2(3) = 4$

b) Siendo $f(x) = x^2 + 3x + 6$, calcular $\quad L = \underset{x \to 2}{Lím} (x^2 + 3x + 6) = 2^2 + 3(2) + 6 = 16$

c) Siendo $f(x) = \sqrt{10-2x}$, calcular $L = \lim_{x\to -3} \sqrt{10-2x} = \sqrt{10-2(-3)} = \sqrt{16} = 4$

d) Siendo $f(x) = \frac{2x-5}{x+4}$, calcular $L = \lim_{x\to 0} \frac{2x-5}{x+4} = \frac{2(0)-5}{0+5} = -\frac{5}{4}$

e) Siendo $f(x) = x\ Sen\ x$, calcular $L = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{\pi}{2} Sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}(1) = \frac{\pi}{2}$

f) Siendo $f(x) = \frac{Ln\ x}{x+e}$, calcular $L = \lim_{x\to 2} \frac{Ln\ x}{x+e} = \frac{Ln\ e}{e+e} = \frac{1}{2e}$

g) Siendo $f(x) = \frac{2^{1-x}}{1-x}$, calcular $L = \lim_{x\to 3} \frac{2^{1-x}}{1-x} = \frac{2^{1-3}}{1-3} = \frac{2^{-2}}{-2} = -\frac{1}{8}$

Ejemplo 2. Véase el cálculo de estos otros límites:

a) $L = \lim_{x\to 2} \sqrt[3]{8x^2+15x+2} = \sqrt[3]{8(2)^2+15(2)+2} = 4$

b) $L = \lim_{x\to -2} \left(2^x - \frac{1}{2}\right) = 2^{-2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

c) $L = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (x - Sen\ x) = \frac{\pi}{2} - Sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$

d) $L = \lim_{x\to 2} [Ln(2x-3)] = Ln\ [2(2)-3] = Ln\ 1 = 0$

Ejemplo 3. Véase el límite que nos lleva a una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$.

Siendo la función $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$, al calcular por reemplazo directo $L = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$ se llega a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$: $L = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{4^2-16}{4-4} = \frac{0}{0}$.

Sin embargo, como x tiende a 4, $x \to 4$ (x no es cuatro aún) el límite se calcula luego de factorizar y simplificar del modo siguiente:

$L = \lim_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = L = \lim_{x\to 4} \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = L = \lim_{x\to 4}(x+4) = 8$. Esto se ilustra en la Figura 2.2.

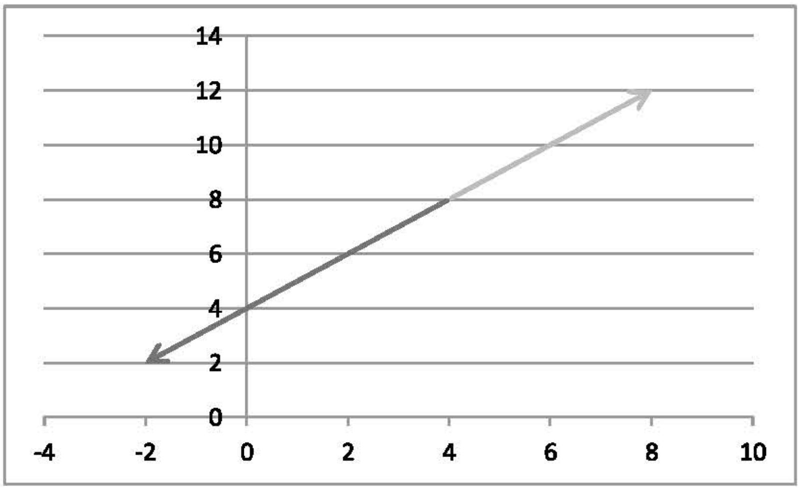

Figura 2.2

Observamos que el límite $L = 8$ existe, aunque la función no está definida para $x_0 = 4$. Hay un vacío en la gráfica.

Ejemplo 4. Se muestra otros límites con formas indeterminadas de la forma $\frac{0}{0}$, los cuales son resueltos por factorización y simplificación en la regla de correspondencia de la función:

a) $L = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-3x}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x(x-3)}{(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} x = 3$

b) $L = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)} = \lim\limits_{x\to 3} (x-3) = 0$

c) $L = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{2-2}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$

d) $L = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{2x-1}{4x^2-1} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{2(1/2)+1} = \frac{1}{2}$

e) $L = \lim\limits_{x\to -2} \frac{4x+8}{x^2-2x-8} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{4(x+2)}{(x-4)(x+2)} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{4}{x-4} = \frac{4}{-2-4} = -\frac{2}{3}$

f) $L = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$

g) $L = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(\sqrt{2x-1}-1)}{x-1} \frac{(\sqrt{2x-1}+1)}{\sqrt{2x-1}+1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x-1}+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{\sqrt{2x-1}+1} = \frac{2}{2} = 1$

h) $L = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} (\sqrt{x}+1) = 2$

Ejemplo 5. (PROBLEMA) Una empresa de energía eléctrica produce la cantidad de $f(t) = 25t^2 + 20t$ kilowatts en el tiempo t en días. Calcular e interpretar $L = \lim\limits_{x\to 7} f(t)$.

Solución.

Calculemos $L = \lim\limits_{x\to 7} f(t) = \lim\limits_{x\to 7} (25t^2 + 20t) = 25(7)^2 + 20(7) =1365$.

Esto significa que cuando el tiempo t se acerca a los 7 días, la empresa tiende a producir 1365 kilowatts de energía eléctrica.

Ejemplo 6. (PROBLEMA) Una compañía estima sus ingresos mediante la función $R(x) = 4x - x^2$ con $x \in [0; 3]$, donde "R" es el ingreso en miles de dólares y "x" es la producción en miles de unidades. Calcular e interpretar $L = \lim\limits_{x\to 1} R(x)$, $L = \lim\limits_{x\to 2^+} R(x)$, $L = \lim\limits_{x\to 3^-} R(x)$. Graficar e interpretar.

Solución.

a) $L = \lim\limits_{x\to 1} R(x) = \lim\limits_{x\to 1} (4x - x^2) = 3$.

Quiere decir que si la compañía está próxima a vender mil productos, sus ingresos se acercan a tres mil dólares.

b) $L = \underset{x\to 2^+}{Lím} R(x) = \underset{x\to 2^+}{Lím} (4x - x^2) = 4.$

Esto significa que cuando en la compañía están por vender dos mil productos (desde valores mayores que dos mil), sus ingresos son cercanos a cuatro mil dólares.

c) $L = \underset{x\to 3^-}{Lím} R(x) = \underset{x\to 3^-}{Lím} (4x - x^2) = 3.$

Significa que si la compañía se acerca a la venta de tres mil productos (desde valores menores que tres mil), sus ingresos con cercanos a tres mil dólares. (Ver Figura 2.3).

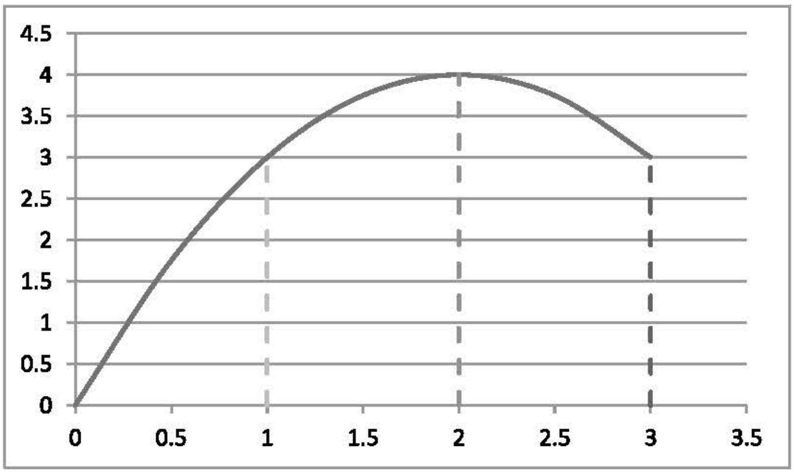

Figura 2.3

2.2. DEFINICIÓN FORMAL DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL. DEMOSTRACIÓN DE LÍMITES

La esencia de la definición formal radica en que para cualquier intervalo "centrado en x_0", $\langle x_0 - \delta; x_0 + \delta\rangle$, su imagen mediante $y = f(x)$ debe estar dentro del intervalo "centrado en L", $\langle L - \varepsilon; L + \varepsilon\rangle$; esto deberá suceder con cualquier número real positivo ε .

Este hecho se formaliza matemáticamente mediante la siguiente definición.

DEFINICIÓN . La afirmación $L = \underset{x\to x_0}{Lím} f(x)$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que si $x \in Dom(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

O simplemente:

$$\underset{x\to x_0}{Lím} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, \text{si } x \in Dom(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

El número ε es dado, el número δ se debe encontrar para que el límite quede demostrado.

(i) En la expresión $|x - x_0| < \delta \rightarrow -\delta < x - x_0 < \delta \rightarrow x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

Se tiene que $x \in \langle x_0 - \delta; x_0 + \delta \rangle$, lo cual significa que todo x que se aproxime a x_0 debe estar acotado por el intervalo $\langle x_0 - \delta; x_0 + \delta \rangle$. (Ver Figura 2.4).

(ii) En la expresión $|f(x) - L| < \varepsilon \rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, se tiene que $f(x) \in \langle L - \varepsilon; L + \varepsilon \rangle$, lo que se interpreta de la siguiente forma: todo $f(x)$ que se aproxime a L debe estar acotado por el intervalo $\langle L - \varepsilon; L + \varepsilon \rangle$.

Las dos expresiones (i) y (ii) garantizan la existencia del límite de una función real en los términos señalados en la definición, con ε y δ tan pequeños como se quieran.

(iii) El valor δ siempre dependerá de ε, es decir, $\delta = \delta(\varepsilon)$.

(iv) En el límite $L = \underset{x \to x_0}{Lím} f(x)$ siempre están presentes tres elementos:

- La función $y = f(x)$,
- El valor de acercamiento x_0,
- El límite L.

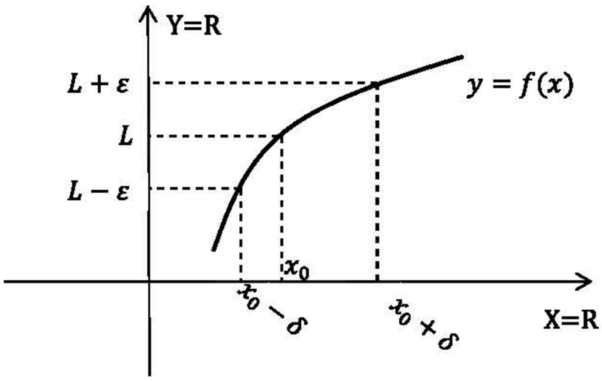

Figura 2.4

OBSERVACIÓN. La definición formal es útil para demostrar límites y propiedades, así también para calcular algunos límites cuyo valor tiene que ser supuesto y luego demostrado.

En seguida se ofrece algunas demostraciones aplicando la definición formal.

Ejemplos. Demostrar los siguientes límites usando la definición formal:

a) $\underset{x \to 2}{Lím}(3x - 7) = -1$; nótese que $f(x) = 3x - 7$, $x_0 = 2$, $L = -1$.

Entonces $\underset{x \to 2}{Lím}(3x - 7) = -1$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ / si $x \in Dom(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ / si $x \in R \wedge 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |3x - 7 - (-1)| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ / si $x \in R \wedge 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |3x - 6| < \varepsilon$.

Partiendo de $|3x-6| = |3(x-2)| = 3|x-2|$

Se debe cumplir $|3x-6| < \varepsilon \rightarrow 3|x-2| < \varepsilon \rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3}$

Se usa el hecho de que $|x-2| < \delta$. De donde $\delta < \frac{\varepsilon}{3}$.

Basta tomar (existe) $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ y el límite queda demostrado.

b) $\underset{x\to 3}{Lím}\ (x^2-x) = 6$, nótese que $f(x) = x^2 - x$, $x_0 = 3$, $L = 6$.

Entonces $\underset{x\to 3}{Lím}\ (x^2-x) = 6$

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ / si $x \in Dom(f) \wedge 0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$.

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ / si $x \in R \wedge 0 < |x-3| < \delta \Rightarrow |x^2-x-6| < \varepsilon$.

Partiendo de $|x^2-x-6| = |(x+2)(x-3)| = |x+2||x-3|$

Acotamos el factor $|x+2|$ suponiendo que $\delta = 1$ usando el hecho de que $|x-3| < \delta$:

$|x-3| < 1 \rightarrow -1 < x-3 < 1 \rightarrow 4 < x+2 < 6 \rightarrow -6 < x+2 < 6$

$\rightarrow |x+2| < 6$

Se debe cumplir $|x^2-x-6| < \varepsilon \rightarrow |x+2||x-3| < \varepsilon \rightarrow 6\delta < \varepsilon \rightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{6}$

Basta tomar (existe) $\delta = Mínimo\ de\ \left\{1; \frac{\varepsilon}{6}\right\}$ y el límite queda demostrado.

c) $\underset{x\to 0}{Lím}\ (x^3+2x+3) = 3$; nótese que $f(x) = x^3+2x+3$, $x_0 = 0$, $L = 3$.

Entonces $\underset{x\to 0}{Lím}\ (x^3+2x+3) = 3$

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ / si $x \in Dom(f) \wedge 0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ / si $x \in R \wedge 0 < |x-0| < \delta \Rightarrow |x^3+2x+3-3| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ / si $x \in R \wedge 0 < |x| < \delta \Rightarrow |x^3+2x| < \varepsilon$

Partiendo de $|x^3+2x| = |x(x^2+2)| = |x||x^2+2|$

Acotamos el factor $|x^2+2|$ suponiendo que $\delta = 1$ y usando el hecho de que $|x| < \delta$:

$|x| < 1 \rightarrow -1 < x < 1 \rightarrow 0 < x^2 < 1 \rightarrow 2 < x^2+2 < 3 \rightarrow -3 < x^2+2 < 3$

$\rightarrow \quad |x^2+2|<3$

Se debe cumplir: $|x^3+2x|<\varepsilon \quad \rightarrow \quad |x||x^2+2|<\varepsilon \quad \rightarrow \quad (\delta)(3)<\varepsilon \quad \rightarrow \quad \delta<\frac{\varepsilon}{3}$

Basta tomar (existe) $\delta = Mínimo\ de\ \left\{1;\ \frac{\varepsilon}{3}\right\}$ y el límite queda demostrado.

d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{2(x^2+1)}=0$, nótese que $f(x)=\frac{x-1}{2(x^2+1)}$, $\quad x_0=1, \quad L=0.$

Entonces $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{2(x^2+1)}=0$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0, \exists\delta>0\, /$ si $x\in Dom(f) \wedge 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0, \exists\delta>0\, /$ si $x\in R \wedge 0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x-1}{2(x^2+1)}-0\right|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0, \exists\delta>0\, /$ si $x\in R \wedge 0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x-1}{2(x^2+1)}\right|<\varepsilon$

Partiendo de $\left|\frac{x-1}{2(x^2+1)}\right| = \frac{1}{|2(x^2+1)|}|x-1|$

Acotamos el factor $\frac{1}{|2(x^2+1)|}$ suponiendo que $\delta=1$ y usando el hecho de que: $|x-1|<\delta$:

$|x-1|<1 \quad \rightarrow \quad -1<x-1<1 \quad \rightarrow \quad 0<x<2 \quad \rightarrow \quad 0<x^2<4 \quad \rightarrow \quad 1<x^2+1<5$

$\rightarrow \quad \frac{1}{5}<\frac{1}{x^2+1}<\frac{1}{1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{10}<\frac{1}{2(x^2+1)}<\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad -\frac{1}{2}<\frac{1}{2(x^2+1)}<\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{|2(x^2+1)|}<\frac{1}{2}$

Se debe cumplir: $\left|\frac{x-1}{2(x^2+1)}\right|<\varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{1}{|2(x^2+1)|}|x-1|<\varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\delta<\varepsilon \quad \rightarrow \quad \delta<2\varepsilon$

Basta tomar (existe) $\delta = Mínimo\ de\ \{1;\ 2\varepsilon\}$ y el límite queda demostrado.

e) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{4}{x-2}=4$, nótese que $f(x)=\frac{4}{x-2}$, $\quad x_0=3, \quad L=4.$

Entonces $\lim\limits_{x\to 3} \frac{4}{x-2}=4$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0, \exists\delta>0\, /$ si $x\in Dom(f) \wedge 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon>0, \exists\delta>0\, /$ si $x\in R-\{2\} \wedge 0<|x-3|<\delta \Rightarrow \left|\frac{4}{x-2}-4\right|<\varepsilon$

Partiendo de $\left|\frac{4}{x-2}-4\right| = \left|\frac{4-4x+8}{x-2}\right| = \left|\frac{12-4x}{x-2}\right| = \frac{4|x-3|}{|x-2|} = \frac{4}{|x-2|}|x-3|$

Acotamos el factor $\frac{\ }{|x-2|}$ suponiendo que $\delta = \frac{\ }{2}$ (pues con $\delta = 1$, falla) y usando el hecho de que $|x-3| < \delta$:

$$|x-3| < \frac{1}{2} \;\rightarrow\; -\frac{1}{2} < x-3 < \frac{1}{2} \;\rightarrow\; \frac{1}{2} < x-2 < \frac{3}{2} \;\rightarrow\; \frac{2}{3} < \frac{1}{x-2} < 2 \;\rightarrow\; \frac{8}{3} < \frac{4}{x-2} < 8$$

$$\rightarrow\; -8 < \frac{4}{x-2} < 8 \;\rightarrow\; \frac{4}{|x-2|} < 8$$

Se debe cumplir $\left|\frac{4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon \;\rightarrow\; \frac{4}{|x-2|}|x-3| < \varepsilon \;\rightarrow\; 8\delta < \varepsilon \;\rightarrow\; \delta < \frac{\varepsilon}{8}$

Basta tomar (existe) $\delta = Mínimo\ de\ \left\{\frac{1}{2};\, \frac{\varepsilon}{8}\right\}$ y el límite queda demostrado.

f) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \sqrt{4x-1} = 1$, nótese que $f(x) = \sqrt{4x-1}$, $\quad x_0 = \frac{1}{2}$, $\qquad L = 1$.

Entonces $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \sqrt{4x-1} = 1$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\, /$ si $x \in Dom(f) \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\, /$ si $x \in \left[\frac{1}{4};\, +\infty\right) \wedge 0 < \left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{4x-1} - 1\right| < \varepsilon$

Partiendo de $\left|\sqrt{4x-1} - 1\right| = \left|(\sqrt{4x-1} - 1)\frac{\sqrt{4x-1}+1}{\sqrt{4x-1}+1}\right| = \left|\frac{4x-2}{\sqrt{4x-1}+1}\right| = \frac{4\left|x-\frac{1}{2}\right|}{\left|\sqrt{4x-1}+1\right|} = \frac{4}{\left|\sqrt{4x-1}+1\right|}\left|x - \frac{1}{2}\right|$

Acotamos el factor $\frac{4}{\left|\sqrt{4x-1}+1\right|}$ usando propiedades de los números reales.

$$\sqrt{4x-1} \geq 0 \;\rightarrow\; \sqrt{4x-1} + 1 \geq 1 \;\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{4x-1}+1} \leq 1 \;\rightarrow\; \frac{4}{\sqrt{4x-1}+1} \leq 4 \;\rightarrow\; \frac{4}{\left|\sqrt{4x-1}+1\right|} \leq 4$$

Se debe cumplir $\left|\sqrt{4x-1} - 1\right| < \varepsilon \;\rightarrow\; \frac{4}{\left|\sqrt{4x-1}+1\right|}\left|x - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \;\rightarrow\; 4\delta < \varepsilon \;\rightarrow\; \delta < \frac{\varepsilon}{4}$

Basta tomar (existe) $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ y el límite queda demostrado.

2.3. LÍMITES LATERALES. LÍMITES INFINITOS

LÍMITES LATERALES.

Se puede acercar a un valor x_0 del dominio de una función $y = f(x)$ de dos maneras: por la izquierda (valores menores que x_0) o por la derecha (valores mayores que x_0). Esto se formaliza del siguiente modo:

a) Al acercarse a x_0 por valores menores que x_0, decimos que el límite L es calculado por la izquierda de x_0 (se denota x_0^-) y se expresa en la forma $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$.

b) Cuando nos acercamos a x_0 por valores mayores que x_0, señalamos que el límite L es calculado por la derecha de x_0 (se denota x_0^+) y se expresa en la forma: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$.

c) Si los límites laterales por la izquierda y por la derecha existen y no son iguales, entonces afirmamos que el límite de la función f no existe en x_0.

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ No existe}$$

d) En caso de que los límites laterales por la izquierda y por la derecha existan y sean iguales, entonces decimos que el límite de la función f existe en x_0 y es igual a L; lo cual se escribe así:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Ejemplo 1. Calcule los límites laterales de la función $f(x) = x^2 + 2$ cuando x tiende a $x_0 = 0$.

Solución.

i) Calculamos el límite lateral por la izquierda: $L = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 2) = 2$.

ii) Calculamos el límite lateral por la derecha: $L = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 + 2) = 2$.

Como los límites laterales existen y son iguales, se concluye que el límite de la función existe y es igual a 2; esto se escribe del modo siguiente: $L = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 2) = 2$. (En la Figura 2.5, ver grafica adjunta).

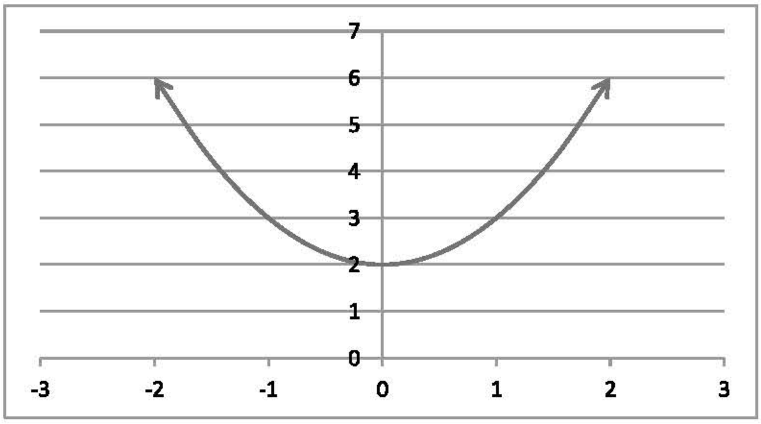

Figura 2.5

Puede verse que cuando se calcula el límite en una función por reemplazo directo, no existe dificultades en sus límites laterales, estos son siempre iguales.

Ejemplo 2. La función $f(x) = \begin{cases} 5 - x; & -1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 1; & 2 < x < 3 \end{cases}$ tiene límite cuando x tiende a $x_0 = 2$.

Solución. Calculamos los límites laterales:

i) Calculamos el límite por la izquierda: $L = \underset{x\to 2^-}{Lím} f(x) = \underset{x\to 2^-}{Lím} (5-x) = 3$

ii) Calculamos el límite por la derecha: $L = \underset{x\to 2^+}{Lím} f(x) = \underset{x\to 2^+}{Lím} (x^2-1) = 3$

Como los límites laterales son iguales, entonces la función $y = f(x)$ tiene límite en $x_0 = 2$, es igual a $L = 3$. En la gráfica observamos que ambos límites son iguales.

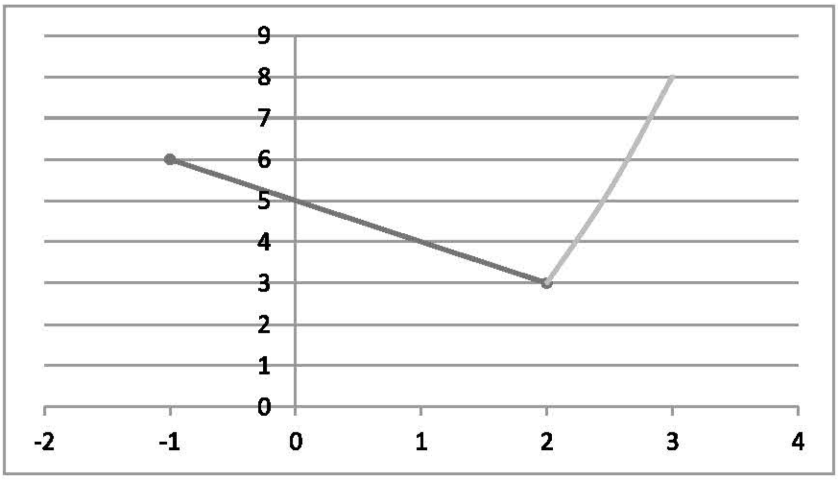

Figura 2.6

Se observa en la Figura 2.6 que el valor $x_0 = 2$ es el punto de división de la regla de correspondencia. A la izquierda de $x_0 = 2$ está definida mediante a $f_1(x) = 5 - x$; a la derecha de $x_0 = 2$, mediante $f_2(x) = x^2 - 1$.

Ejemplo 3. La función $f(x) = \begin{cases} x; \; x \leq 1 \\ 1-x; \; x > 1 \end{cases}$, NO tiene límite cuando x tiende a $x_0 = 1$.

Solución. Calculamos los límites laterales:

i) Calculamos el límite por la izquierda: $L = \underset{x\to 1^-}{Lím} f(x) = \underset{x\to 1^-}{Lím} (x) = 1$

ii) Calculamos el límite por la derecha: $L = \underset{x\to 1^+}{Lím} f(x) = \underset{x\to 1^+}{Lím} (1-x) = 0$

Como los límites laterales NO son iguales, entonces la función $y = f(x)$ NO tiene límite en $x_0 = 1$. En la gráfica a continuación observamos que ambos límites son diferentes.

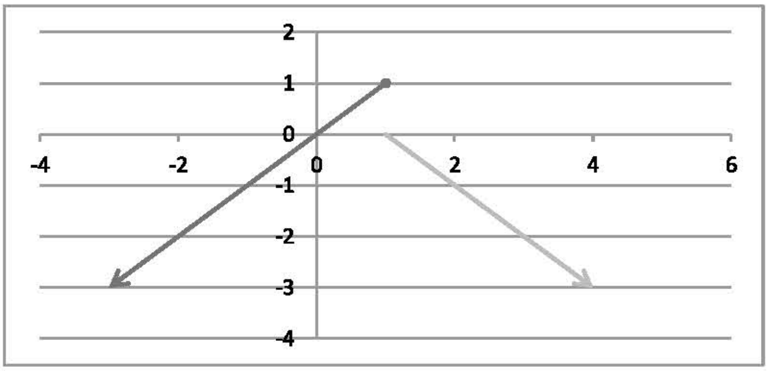

Figura 2.7

Ejemplo 4. (PROBLEMA) Los fisiólogos pueden medir el consumo aproximado de oxígeno $C(x)$ de un atleta como una función de su velocidad x en km por hora. El modelo que describe este hecho es el siguiente: $C(x) = \frac{4}{81}(x^2 + 5)$; con $0 \leq x < 20$.

Hagamos algunas predicciones mediante un examen a la gráfica dada de $C(x)$. (Ver Figura 2.8).

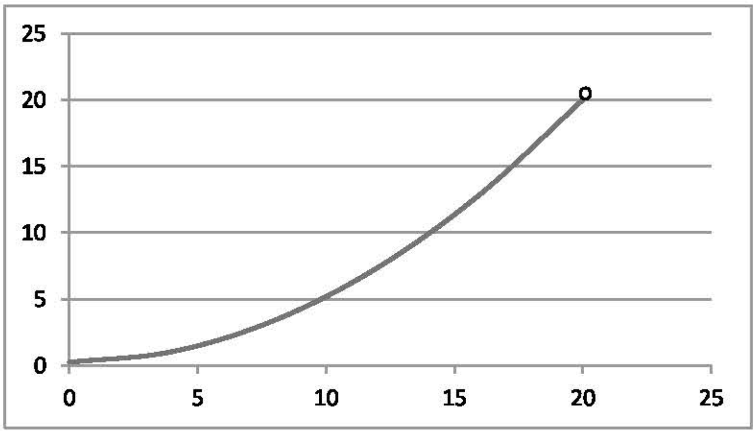

Figura 2.8

a) En la figura, concentremos la atención en la parte de la gráfica cercana a la máxima velocidad del atleta. A medida que la velocidad x aumenta acercándose a 20 kilómetros por hora, se pronostica que el consumo de oxígeno se aproxima a 20 unidades.

El atleta no puede alcanzar una velocidad de 20 kilómetros por hora, solo puede estar muy cerca de $x = 20$ por la izquierda (según este modelo). En notación matemática esto se escribe $L = \underset{x\to 20^-}{Lím}\ C(x) = 20$.

Se entendería que "el consumo de oxígeno $C(x)$ sería de 20 unidades conforme la velocidad del atleta se aproxima y está muy cerca de 20 kilómetros por hora".

b) Apliquemos la misma idea cerca de la velocidad $x = \sqrt{76}$ kilómetros por hora. A medida que aumenta la velocidad de caminata acercándose progresivamente a $x = \sqrt{76}$ (por la izquierda) —como se muestra en la misma figura—, es natural predecir que el consumo de oxígeno $C(x)$ se aproxime al valor de 4 unidades. Su notación será $L = \underset{x \to \sqrt{76}^-}{Lím} C(x) = 4$.

c) Puede considerarse que conforme disminuye la velocidad de la carrera hasta llegar a valores cercanos a $x = \sqrt{76}$ kilómetros por hora (por la derecha), se observa en la gráfica que también el consumo de oxígeno se acerca a 4 unidades. Su notación será $\underset{x \to \sqrt{76}^+}{Lím} C(x) = 4$.

d) De las partes (b) y (c) se rescata que acercándose por la izquierda o por la derecha de $x = \sqrt{76}$, el consumo de oxígeno se aproxima a 4 unidades, en este caso se puede escribir simplemente $L = \underset{x \to \sqrt{76}}{Lím} C(x) = 4$, dado que el límite existe.

Ejercicio. Explique el ejercicio anterior si la función fuera $C(x) = \begin{cases} \frac{5}{81}x^2 + 1; \ 0 \leq x \leq 9 \\ x - 3; \ 9 < x < 20 \end{cases}$, para valores $x = 9$ y $x = 20$. Previamente realice la gráfica.

LÍMITES INFINITOS.

En el cálculo de algunos límites, a veces al aproximarse a un valor x_0 el valor correspondiente para la imagen se hace muy grande, esto significa que se orienta al infinito positivo ($y_0 \to +\infty$) o al infinito negativo ($y_0 \to -\infty$). Estos límites se denominan "límites infinitos" y se formalizan del modo siguiente:

DEFINICIÓN . Sea $f: I \subset R \to R$ una función real y sea $x_0 \in I$, entonces:

a) $\underset{x \to x_0^-}{Lím} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 /$ si $0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) > M$. (Ver Figura 2.9).

b) $\underset{x \to x_0^+}{Lím} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 /$ si $0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) > M$. (Ver Figura 2.10).

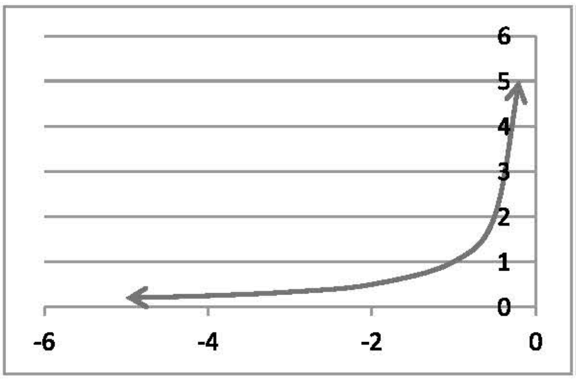

Figura 2.9

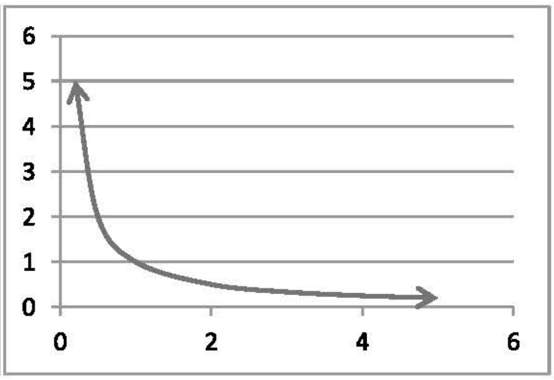

Figura 2.10

c) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0, \exists \delta > 0 /$ si $0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow f(x) < N$. (Ver Figura 2.11).

d) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0, \exists \delta > 0 /$ si $0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow f(x) < N$. (Ver Figura 2.12).

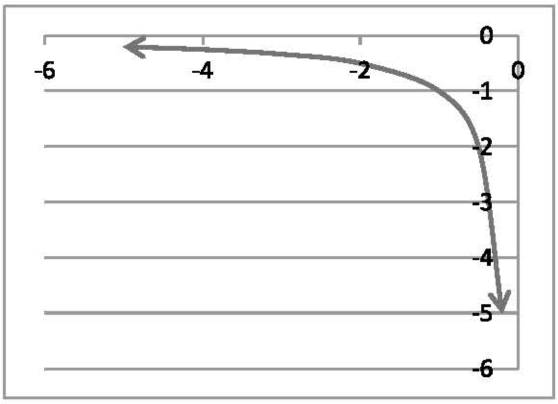

Figura 2.11

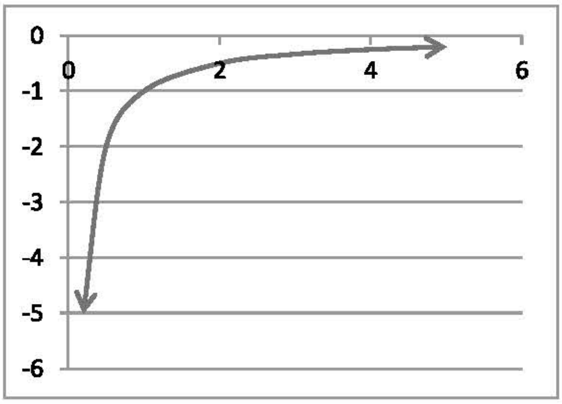

Figura 2.12

e) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0 /$ si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. (Ver Figura 2.13).

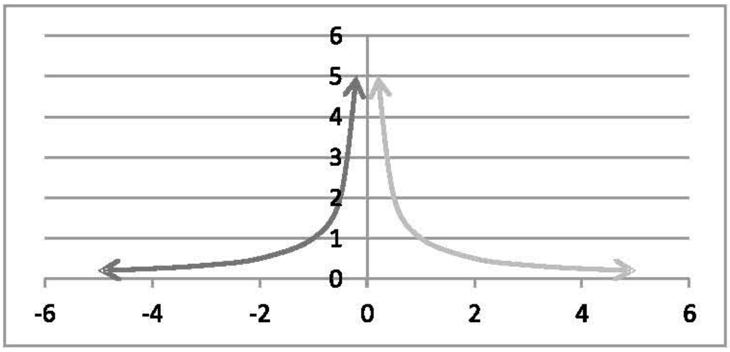

Figura 2.13

f) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall N < 0, \exists \delta > 0 /$ si $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < N$. (Observar la Figura 2.14).

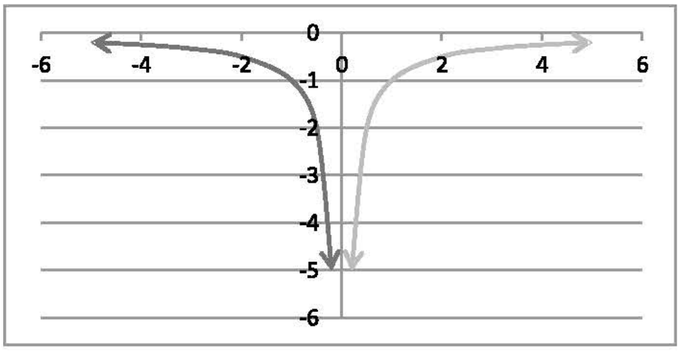

Figura 2.14

Ejemplo 5. En estos ejemplos se usan las equivalencias que se establecieron para el cálculo de límites. Las cuales se presentan más adelante, en el acápite 2.5.

a) $L = \underset{x\to 3^-}{Lím}\left(\frac{1}{x-3}\right) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

b) $L = \underset{x\to 3^+}{Lím}\left(\frac{1}{x-3}\right) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

c) $L = \underset{x\to 2^-}{Lím}\left[\frac{x+3}{x-2}\right] = \frac{5}{0^-} = -\infty$

d) $L = \underset{x\to -4^+}{Lím}\left[\frac{x+3}{x+4}\right] = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

e) $L = \underset{x\to -2^-}{Lím}\left[\frac{x}{x+2}\right] = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

f) $L = \underset{x\to 0^+}{Lím}\left[\frac{x+4}{x}\right] = \frac{4}{0^-} = -\infty$

Ejemplo 6. Observemos aquí que pese a existir los límites laterales, el límite no existe, dado que $+\infty$ o $-\infty$ no son números reales.

Como $L = \underset{x\to 1^-}{Lím}\left[\frac{3}{(x-1)^2}\right] = \frac{3}{0^+} = +\infty$ y $L = \underset{x\to 1^+}{Lím}\left[\frac{3}{(x-1)^2}\right] = \frac{3}{0^+} = +\infty$, entonces $L = \underset{x\to 1}{Lím}\left[\frac{3}{(x-1)^2}\right] = \frac{3}{0^+} = +\infty$.

Ejemplo 7. (PROBLEMA) El costo (en millones de dólares) para un gobierno, por la captura del x % de una droga ilegal al entrar en su país es dada por $C(x) = \frac{528x}{100-x}$ con $0 \leq x < 100$.

a) Hallar el costo de la captura del 25 %.

b) Hallar el costo de la captura del 50 %.

c) Hallar el costo de la captura del 75 %.

d) Hallar el costo de la captura del 90 %.

e) Determinar el límite de $y = C(x)$ cuando x se aproxima al 100 % por la izquierda.

Solución. Evaluamos en la función de costo, el valor de cada porcentaje propuesto:

a) C(25)= 176 millones de dólares.

b) C(50)= 528 millones de dólares.

c) C(75)= 1 584 millones de dólares.

d) C(90)= 4 752 millones de dólares.

e) $C = \underset{x \to 100^-}{Lím} \left[\frac{528x}{100-x}\right] = \frac{528000}{0^+} = +\infty$, inversión muy grande. Es decir, a medida que se pretende una mayor captura de droga ilegal (acercarse al 100%), la inversión crece enormemente.

Si se optara por capturar toda la droga, la inversión resultaría "infinita"; lo cual quiere decir que, según este modelo, es imposible eliminar el ingreso de la droga. (Ver Figura 2.15).

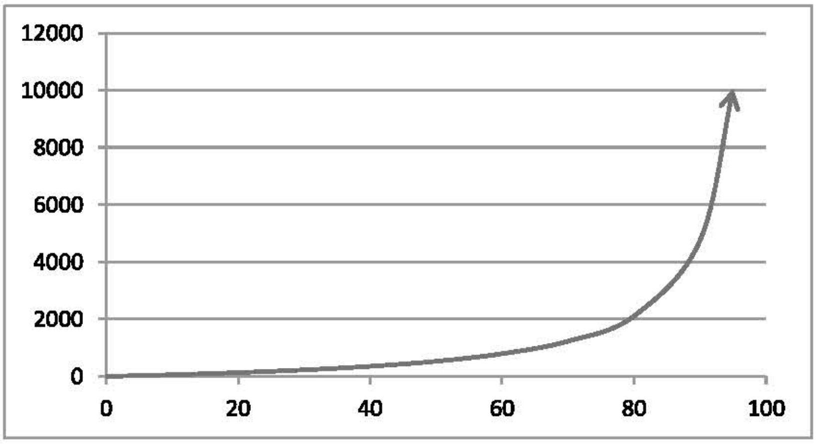

Figura 2.15

2.4. PROPIEDADES DE LOS LÍMITES. CÁLCULO DE LÍMITES

PROPIEDADES DE LOS LÍMITES.

a) $\underset{x \to x_0}{Lím}\ k = k$, siendo k una constante real.

b) $\underset{x \to x_0}{Lím} x^n = x_0^n$

c) $\underset{x \to x_0}{Lím} P(x) = P(x_0)$, siendo $P(x)$ un polinomio de grado n.

d) $\underset{x \to x_0}{Lím} k \cdot f(x) = k \cdot \underset{x \to x_0}{Lím} f(x)$

e) $\underset{x \to x_0}{Lím} [\mathrm{f(x)}]^{\mathrm{n}} = \left[\underset{x \to x_0}{Lím} \mathrm{f(x)}\right]^{\mathrm{n}}$

f) $\underset{x \to x_0}{Lím} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$, siempre que la raíz está definida.

g) $\underset{x \to x_0}{Lím} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\underset{x \to x_0}{Lím} f(x)}$, siempre que la raíz está definida.

h) $\underset{x \to x_0}{Lím}[f(x) + g(x)] = \underset{x \to x_0}{Lím} f(x) + \underset{x \to x_0}{Lím} g(x)$

i) $\underset{x \to x_0}{Lím}[f(x) - g(x)] = \underset{x \to x_0}{Lím} f(x) - \underset{x \to x_0}{Lím} g(x)$

j) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

k) $\lim_{x\to x_0}[f(x)\div g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\div \lim_{x\to x_0} g(x)$, con $\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$

OBSERVACIONES.

a) En las propiedades de los límites de funciones reales que tienen raíces de índice par, son válidas para valores de "x" estar en el dominio que les corresponde.

b) Muchos de los límites pueden ser calculados por sustitución directa de x por x_0, sin mayores dificultades.

c) Cuando en la evaluación de un límite por sustitución directa aparecen formas indeterminadas como $0/0$, entonces se reescribe la función haciendo uso de identidades, factorización, simplificaciones o propiedades y así llegar a formas equivalentes y simplificadas en las que se puedan calcular los límites.

PROPOSICIONES DE LOS LÍMITES.

Las proposiciones que se muestran a continuación se usan casi exclusivamente para hacer uso de otros límites o propiedades, en mucho de los casos se aplican en asignaturas de matemática más avanzadas.

a) Límites notables: (i) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Sen} x}{x} = 1$ (ii) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\operatorname{Cos} x}{x} = 0$

b) Teorema del Sándwich: Si $f(x)\le h(x)\le g(x)$ y $\lim_{x\to x_0} f(x) = L = \lim_{x\to x_0} g(x)$, entonces $\lim_{x\to x_0} h(x) = L$.

c) Límite de la función compuesta: Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{t\to t_0} g(t) = x_0$, entonces $\lim_{t\to t_0} f[g(t)] = L$, siempre que $t_0\in Dom(fog)$ y $\exists C>0$ tal que $|t-t_0|<C \Rightarrow g(t)=x_0$.

d) Límite de la función acotada: Si $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ y $f(x)$ es una función acotada (existe $k>0$ tal que $|f(x)|\le k$), entonces $\lim_{x\to x_0}\big(g(x)\big)\cdot(f(x)) = 0$.

Ejemplo 1. Observemos el cálculo de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -3} x^3 = (-3)^3 = -27$

b) $\lim_{x\to 3}(17-2x-x^2) = 17-2(3)-(3)^2 = 2$

c) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5} = \lim_{x\to 5} 5\frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}(x+5) = 5+5 = 10$

d) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2} = \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{4}$

Ejemplo 2. Véase el cálculo de los límites siguientes:

a) $L = \lim_{x\to 0} \frac{Sen(3x)}{x} = \lim_{x\to 0} 3\frac{Sen(3x)}{3x} = 3\lim_{x\to 0}\frac{Sen(3x)}{3x} = 3(1) = 3.$

b) $L = \lim_{x\to 0} \frac{Sen\,x}{5x} = \frac{1}{5}\left(\lim_{x\to 0}\frac{Sen\,x}{x}\right) = \frac{1}{5}(1) = \frac{1}{5}$

c) $L = \lim_{x\to 0} \frac{Sen\,(4x)}{Sen\,(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{Sen\,(4x)}{x}}{\frac{Sen\,(3x)}{x}} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{Sen(4x)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{Sen(3x)}{x}} = \frac{4\left(\lim_{x\to 0}\frac{Sen(4x)}{4x}\right)}{3\left(\lim_{x\to 0}\frac{Sen(3x)}{3x}\right)} = \frac{4(1)}{3(1)} = \frac{4}{3}$

d) Sea $f(x) = Ln\,x$, se ve que $\lim_{x\to e} f(x) = \lim_{x\to e} Ln\,x = Ln\,e = 1.$

Por otro lado, sea $g(t) = e^{2t+1}$ y se observa que $\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0}(e^{2t+1}) = e.$

Entonces, $\lim_{t\to 0} f[g(t)] = \lim_{x\to 0} Ln(e^{2t+1}) = Ln\,e = 1.$

e) $L = \lim_{x\to 0} x\,Sen\,(1/x)$. Se debe aplicar el teorema del sándwich.

Veamos: $-1 \le Sen(1/x) \le 1 \;\to\; 0 \le |Sen(1/x)| \le 1 \;\to\; |x|0 \le |x||Sen(1/x)| \le |x|$

$\to\; 0 \le |x\,Sen(1/x)| \le |x|.$

En lo último: $f(x) = 0,\quad h(x) = |x\,Sen\,(1/x)|,\quad g(x) = |x|.$

Por lo tanto, como $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(0) = 0$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0}|x| = 0$, entonces $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}|x\,Sen(1/x)| = 0.$

f) $L = \lim_{x\to 0} \sqrt[5]{x}\,Sen(1/x^2)$. Debe usarse el límite de la función acotada.

Sea: $g(x) = \sqrt[5]{x}$, se ve que $\lim_{x\to 0}\sqrt[5]{x} = 0$; y la función $f(x) = Sen(1/x^2)$ es acotada, pues $-1 \le Sen(1/x^2) \le 1$,

Entonces, $\lim_{x\to 0}(g(x))\cdot(f(x)) = \lim_{x\to 0}(\sqrt[5]{x})(Sen(1/x^2)) = 0$

2.5. EQUIVALENCIAS Y FORMAS INDETERMINADAS EN LÍMITES

EQUIVALENCIAS EN EL CÁLCULO DE LÍMITES DE UNA FUNCIÓN REAL.

En el estudio de los límites aparecen algunas equivalencias que en el álgebra se dejaron de lado, por ser formas indeterminadas o porque no estaban definidas. Para un mejor entendimiento se usará el signo "=" en lugar del signo de equivalencia "≈".

OBSERVACIÓN. En el estudio de los límites de las funciones reales, algunas expresiones algebraicas tienen equivalentes que facilitan los cálculos de límites. Así mismo se debe indicar que los resultados $-\infty$ o $+\infty$ no son números reales, por lo que en estos casos en realidad el límite no existe, no obstante, nos informa sobre la tendencia de las funciones reales para valores muy grandes de x.

En seguida se muestra algunos de ellos:

Si $k>0$	$k\cdot(+\infty)=+\infty$	$k\cdot(-\infty)=-\infty$	$+\infty+k=+\infty$	$-\infty+k=-\infty$
	$\frac{+\infty}{k}=+\infty$	$\frac{k}{0^+}=+\infty$	$\frac{k}{0^-}=-\infty$	$\infty^k=\infty$
Si $k<0$	$k\cdot(+\infty)=-\infty$	$k\cdot(-\infty)=+\infty$	$+\infty+k=+\infty$	$-\infty+k=-\infty$
	$\frac{+\infty}{k}=-\infty$	$\frac{k}{0^+}=-\infty$	$\frac{k}{0^-}=+\infty$	
Otros	$\infty+\infty=\infty$	$\infty\cdot\infty=\infty$		

Ejemplo 1. Al calcular los siguientes límites se usarán equivalencias de esta forma:

Si $k>0$: $\frac{k}{0^+}=+\infty$; $\frac{k}{0^-}=-\infty$. o Si $k<0$: $\frac{k}{0^+}=-\infty$; $\frac{k}{0^-}=+\infty$.

a) $L=\underset{x\to 3^+}{Lím}\left(\frac{x+1}{x^2-9}\right)=\frac{4}{0^+}=+\infty$, pues al acercarse x a 3 por la derecha, la expresión x^2-9 tiende a 0 por la derecha (por valores mayores que cero): 0^+

b) $L=\underset{x\to 3^-}{Lím}\left(\frac{x+1}{x^2-9}\right)=\frac{4}{0^-}=-\infty$, puesto que al aproximarse x a 3 por la izquierda, la expresión x^2-9 tiende a 0 por la izquierda (por valores menores que cero): 0^-

Lo mismo sucede en el punto $x_0=-3$.

c) $L=\underset{x\to -3^+}{Lím}\left(\frac{x+1}{x^2-9}\right)=\frac{4}{0^+}=+\infty$, ya que al acercarse x a -3 por la derecha, la expresión x^2-9 tiende a 0 por la derecha (por valores mayores que cero): 0^+

d) $L=\underset{x\to -3^-}{Lím}\left(\frac{x+1}{x^2-9}\right)=\frac{4}{0^-}=-\infty$, pues al orientarse x a -3 por la izquierda, la expresión x^2-9 tiende a 0 por la izquierda (por valores menores que cero): 0^-

Tal como se muestra en la Figura 2.16.

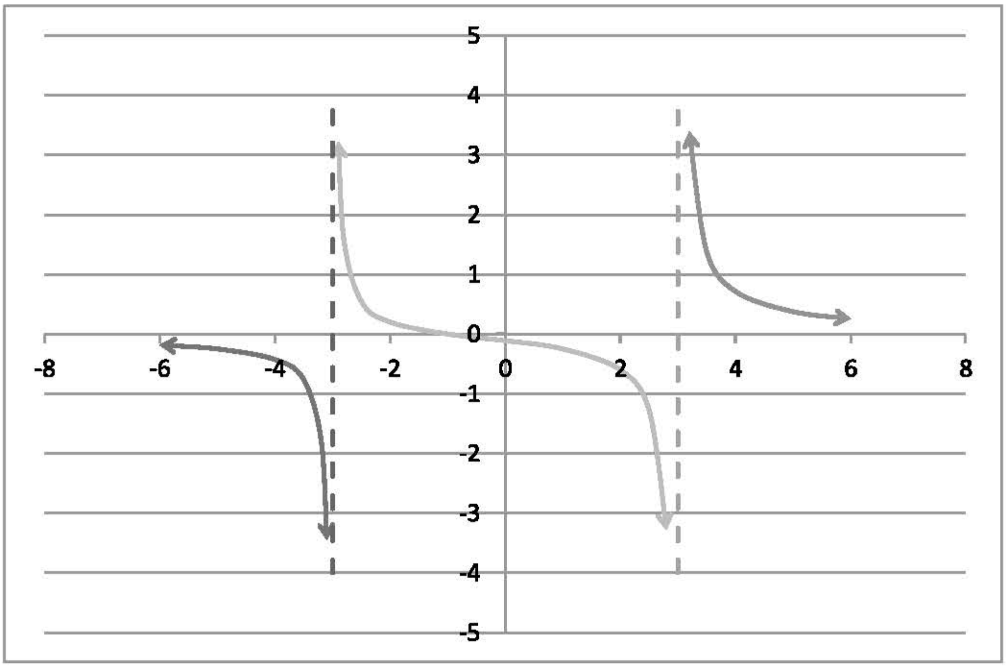

Figura 2.16

e) $L = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)^3} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x+2}{(x-2)^2} = \frac{4}{0^+} = \infty$, esto se debe a que al acercarse x a 2 por la izquierda o por la derecha, la expresión $(x-2)^2$ tiende a 0 por la derecha (por valores mayores que cero): 0^+

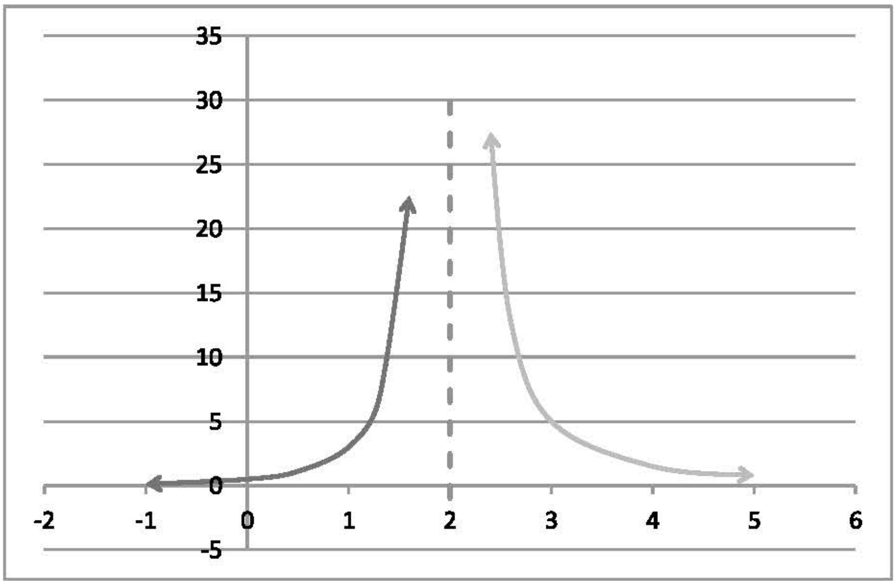

Figura 2.17

f) $L = \lim\limits_{x\to 4^-} \left(\frac{-3}{x^2-16}\right) = \frac{-3}{0^-} = +\infty$, pues cuando x se aproxima a 4 por la izquierda, la expresión x^2-16 tiende a 0 por la izquierda: 0^-.(Ver Figura 2.17).

g) $L = \underset{x \to 4^+}{Lím} \left(\frac{-3}{x^2-16}\right) = \frac{-3}{0^+} = -\infty$, ya que al hacerse x cercano a 4 por la derecha, la expresión $x^2 - 16$ tiende a 0 por la derecha: 0^+. (Ver Figura 2.18).

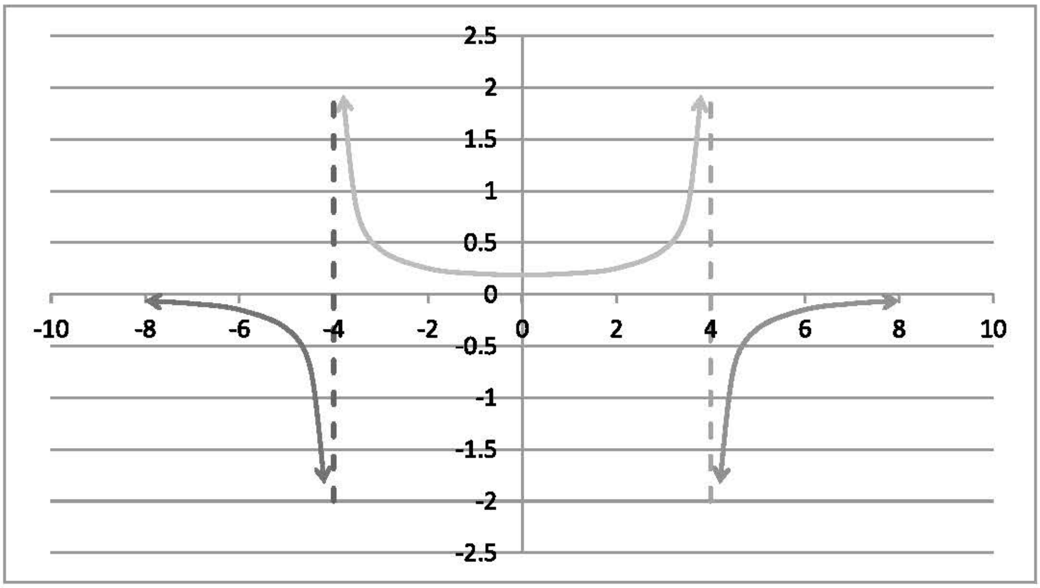

Figura 2.18

2.6. LÍMITES EN EL INFINITO

Existen límites cuyo acercamiento a través de x es hasta el infinito positivo $(x \to +\infty)$ o hasta el infinito negativo $(x \to -\infty)$. Teóricamente, estos límites indican la tendencia de la variable dependiente "y" para posibles crecimientos ilimitados de la variable independiente "x".

Estos se calculan de dos maneras:

a) Usando un *artificio algebraico* que consiste en dividir numerador (N) y denominador (D) de la fracción entre la variable independiente con el exponente más alto que aparece en el denominador; se simplifica y se halla el resultado usando las equivalencias que existen para el caso de límites.

b) *Observando los grados* del numerador (°N) y del denominador (°D) de la función dada, siempre que sea un cociente de polinomios; según el siguiente detalle: siendo $L = \underset{x \to -\infty}{Lím} f(x)$ o $L = \underset{x \to +\infty}{Lím} f(x)$

(i) Si °N=°D, entonces $L = k$, siendo k una constante obtenida como cociente de los coeficientes principales del numerador y del denominador.

(ii) Si °N>°D, entonces $L = \pm\infty$.

(iii) Si °N< °D, entonces $L = 0$.

DEFINICIÓN 1. Siendo $y = f(x)$ una función real:

a) $\underset{x\to+\infty}{Lím} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0/ \text{ si } x \in Dom(f) \wedge x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

b) $\underset{x\to-\infty}{Lím} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N > 0/ \text{ si } x \in Dom(f) \wedge x < -N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$

DEFINICIÓN 2 . Siendo $y = f(x)$ una función real:

a) $\underset{x\to+\infty}{Lím} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N > 0$ tal que si $x \in Dom(f) \wedge x > N \Rightarrow f(x) > M.$

b) $\underset{x\to-\infty}{Lím} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N < 0$ tal que si $x \in Dom(f) \wedge x < N \Rightarrow f(x) > M.$

c) $\underset{x\to+\infty}{Lím} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists N > 0$ tal que si $x \in Dom(f) \wedge x > N \Rightarrow f(x) < M.$

d) $\underset{x\to-\infty}{Lím} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0, \exists N < 0$ tal que si $x \in Dom(f) \wedge x < N \Rightarrow f(x) < M.$

CÁLCULO DE LÍMITES EN EL INFINITO.

En el cálculo de los límites que se dan a continuación aparecen modos indeterminados de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$.

Ejemplo1. Usando el artificio algebraico (dividiendo numerador y denominador entre la variable independiente con el mayor exponente que aparece en el denominador), se calcula los siguientes límites:

a) $L = \underset{x\to-\infty}{Lím} \frac{x^2+3}{x+1} = \underset{x\to-\infty}{Lím} \frac{\frac{x^2+3}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \underset{x\to-\infty}{Lím} \frac{x+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{(-\infty)+0}{1+0} = -\infty$. (Ver Figura 2.19).

b) $L = \underset{x\to+\infty}{Lím} \frac{x^2+3}{x+1} = \underset{x\to+\infty}{Lím} \frac{\frac{x^2+3}{x}}{\frac{x+1}{x}} = \underset{x\to+\infty}{Lím} \frac{x+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{(+\infty)+0}{1+0} = +\infty$. (Ver Figura 2.20).

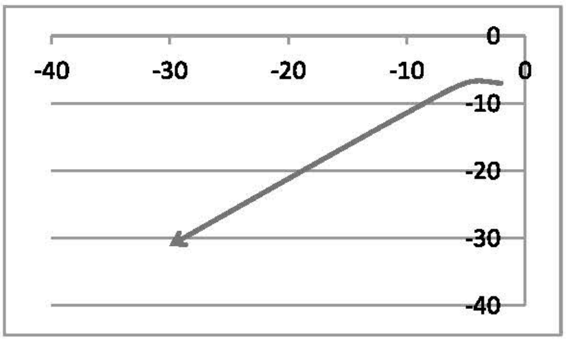

Figura 2.19

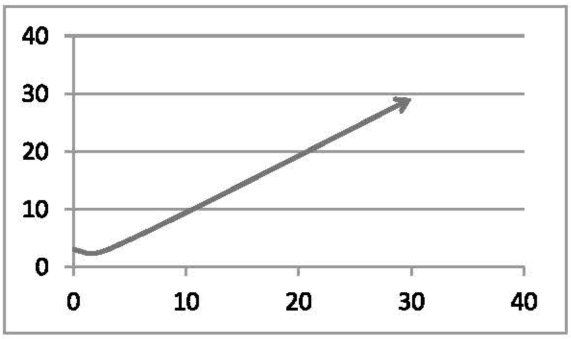

Figura 2.20

c) $L = \underset{x\to+\infty}{Lím} \frac{\sqrt{x^2+7x+10}}{x} = \underset{x\to+\infty}{Lím} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2})}}{x} = \underset{x\to+\infty}{Lím} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}}{x} = \underset{x\to+\infty}{Lím} \sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}$

$= \sqrt{1+0+0} = 1$. (Ver Figura 2.21).

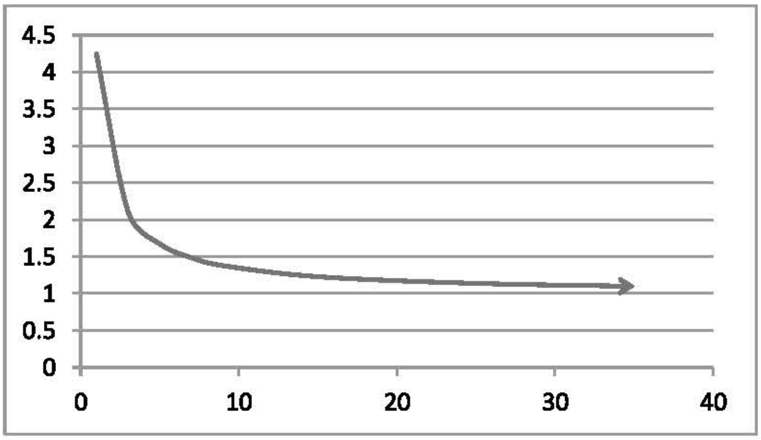

Figura 2.21

d) $L = \underset{x\to-\infty}{Lím} \quad = \underset{x\to-\infty}{Lím} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2})}}{x} = \underset{x\to-\infty}{Lím} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}}{x} = -\underset{x\to-\infty}{Lím} \sqrt{1+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^2}}$

$= -\sqrt{1+0+0} = -1$. (Observar la Figura 2.22).

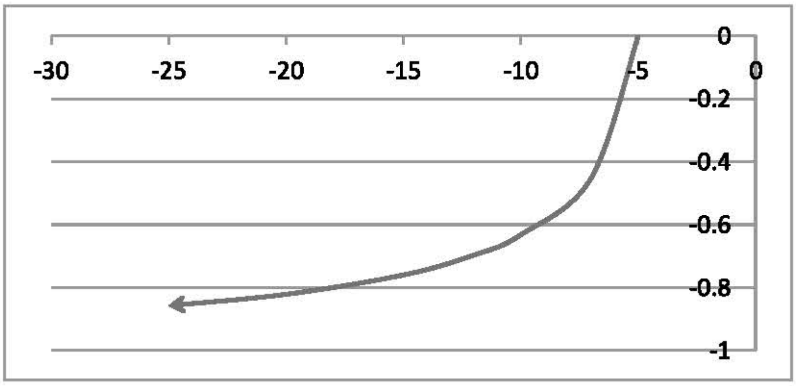

Figura 2.22

e) $L = \underset{x\to+\infty}{Lím} (\sqrt{x^2+2} - x) = \underset{x\to+\infty}{Lím} (\sqrt{x^2+2} - x) \frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\sqrt{x^2+2}+x} = \underset{x\to+\infty}{Lím} \frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x} = \frac{2}{\infty} = 0.$

(Ver Figura 2.23).

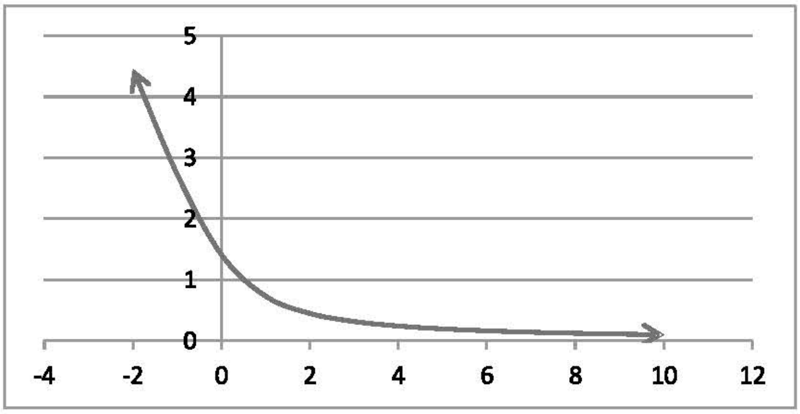

Figura 2.23

f) $L = \underset{x\to-\infty}{Lím}(\sqrt{x^2+2} - x) = +\infty + \infty = +\infty$

Ejemplo 2. Usando la observación de los grados de numerador y denominador, calcular:

a) $L = \underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{2x^2+7x+5}{x^3+2x+1} = 0$, pues el °N=2, el °D=3, se cumple que el °N < °D, $\Rightarrow L = 0$.

b) $L = \underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{2x^2+3x+5}{3x^2+2x+1} = \frac{2}{3}$, pues el °N=2, el °D=2, se cumple que el °N = °D, $\Rightarrow L = \frac{2}{3}$.

c) $L = \underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{2x^2+2x+1}{2x+3} = +\infty$, pues el °N=2, el °D=1, se cumple que el °N >°D, $\Rightarrow L = +\infty$

Ejemplo 3. (PROBLEMA) Se invierte 5 000 dólares al 12% de interés compuesto semestralmente, el capital tras t años es dado por $A(t) = 5000(1{,}06)^{2t}$.

a) Calcular el capital A luego de 1 año.
b) Calcular el capital A al término de 2 años.
c) Calcular el capital A tras 5 años.
d) Calcular el capital A después de 10 años.
e) Calcular el capital A luego de 20 años.
f) Hallar e interpretar $A = \lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$

Solución.

Recordemos que el interés compuesto se obtiene por la experiencia de los bancarios según la siguiente relación: $A(t) = P\cdot\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$, donde P es el capital invertido; r, la tasa anual de interés n veces al año; t dado en años; y A es la cantidad acumulada tras n años.

Para el presente problema, la relación es dada por $A(t) = 5000(1{,}06)^{2t}$a) $A(1) =$ 5 000 $(1{,}06)^{2(1)}$ = 5 618 dólares.

b) $A(2) =$ 5 000 $(1{,}06)^{2(2)}$ = 6 312,38488 dólares.

c) $A(5) =$ 5 000 $(1{,}06)^{2(5)}$ = 8 954,2384 dólares.

d) $A(10) =$ 5 000 $(1{,}06)^{2(10)}$ = 16 035,6773 dólares.

e) $A(20) = 5\,000\,(1{,}06)^{2(20)} = 51\,428{,}5896$ dólares.

f) $A = \lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = \lim\limits_{t\to+\infty}[5000(1{,}06)^{2t}] = +\infty$, la cantidad acumulada es muy grande.

Lo que se grafica a continuación:

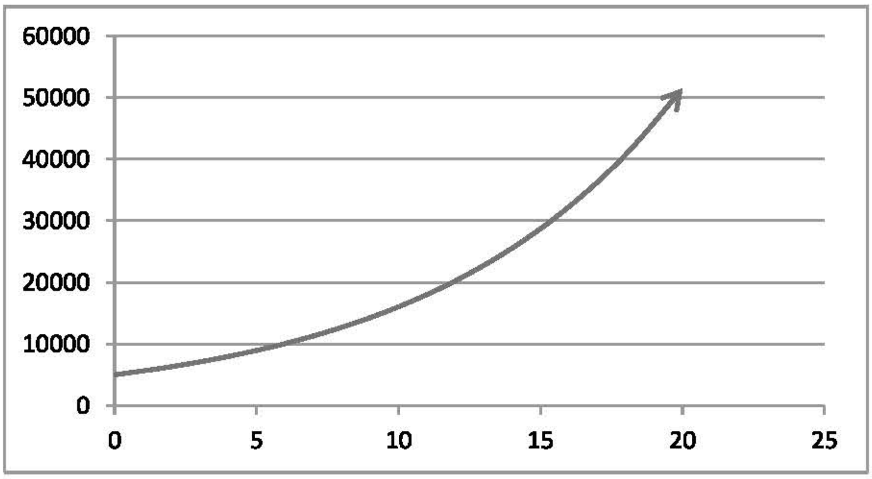

Figura 2.24

2.7. LÍMITES DE LA FORMA INDETERMINADA $1^{+\infty}$. OTROS LÍMITES

Algunos límites requieren de un estudio particular sofisticado que use expresiones más adelantadas de la matemática, como por ejemplo las *sucesiones infinitas* a fin de ser expresadas y así sean demostrados sus resultados; es el caso de este límite que tiene al número trascendente "$e = 2{,}718281828\ldots$" como protagonista.

TEOREMA. La función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ tiene al límite "e" siendo $e = 2{,}718281828\ldots$, cuando x se oriente al infinito, es decir, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

OBSERVACIÓN 1. Si se hace el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$ se tiene $x = \frac{1}{t}$

Por otro lado, si x se orienta al infinito $x \to +\infty$, entonces $\frac{1}{x}$ tiende a cero, $\frac{1}{x} \to 0$.

Por lo que el límite del teorema se transforma en $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{1/t} = e$.

OBSERVACIÓN 2. El límite anterior se puede extender al cálculo de límites de la forma indeterminada $1^{+\infty}$ del modo siguiente: Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$, entonces $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}$.

En efecto, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}[1 + (f(x) - 1)]^{g(x)}$

$$=\lim_{x\to x_0}\left\{[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{(f(x)-1)g(x)}=\left\{\lim_{x\to x_0}[1+(f(x)-1)]^{\frac{1}{f(x)-1}}\right\}^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)(g(x)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)}.$$

Ejemplo 1. Calcular los siguientes límites:

a) $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5}=e\cdot 1^5=e$$

b) $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\left[\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{3}=[e]^3=e^3$

c) $L=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x+3}{x-1}-1\right)^{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left\{\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right\}^{\frac{4}{x-1}(x+3)}=\left\{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right\}^{\frac{4}{x-1}(x+3)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}4(x+3)/(x-1)}=e^4$$

d) $L=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+Cos\,x)^{3Sec\,x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\left(1+\frac{1}{Secx}\right)^{Sec\,x}\right\}^{3}=\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{Sec\,x}\right)^{Sec\,x}\right]^{3}=e^3$

e) $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{Ln\,(1+kx)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}Ln(1+kx)=\lim\limits_{x\to 0}Ln\,(1+kx)^{1/x}$

$$=Ln\left\{\lim_{x\to 0}\left[(1+kx)^{1/kx}\right]^{k}\right\}=Ln\,(e^k)=k\cdot(Ln\,e)=k$$

f) $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$. Se desarrolla haciendo un cambio de variable.

Sea $e^x-1=t$ entonces $e^x=t+1$, además si $x\to 0\Rightarrow t\to 0$.

Aplicamos Ln para despejar x:

$$Ln(e^x)=Ln\,(t+1)\qquad\to\qquad x\,Ln\,e=Ln\,(t+1)\qquad\to\qquad x=Ln\,(t+1)$$

En el límite $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t}{Ln(t+1)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{\frac{Ln(t+1)}{t}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{Ln(t+1)^{1/t}}$

$$=\frac{1}{Ln\left[\lim\limits_{t\to 0}(t+1)^{1/t}\right]}=\frac{1}{Ln\,e}=1.$$

Ejercicio. Calcular el siguiente límite: $L = \underset{x\to 0}{Lím} \frac{a^x-1}{x}$, $a > 0$. Respuesta: $L = Ln\ a$

Ejemplo 2. Calcular $L = \underset{x\to 0}{Lím} \frac{3^x-2^x}{x} = \underset{x\to 0}{Lím} \frac{3^x-1-2^x+1}{x} = \underset{x\to 0}{Lím} \frac{3^x-1}{x} - \underset{x\to 0}{Lím} \frac{2^x-1}{x}$

$= Ln\ 3 - Ln\ 2 = Ln(3/2)$

2.8. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES REALES. CONTINUIDAD PUNTUAL

INTRODUCCIÓN. Literalmente una función $y = f(x)$ es continua en su dominio, cuando para cada valor x del dominio existe un valor y en la imagen; por otro lado, no será continua cuando existe algún valor x en el dominio para el cual la función no está definida o hay un salto finito o infinito en la imagen, o este es indeterminado.

DEFINICIÓN. (Continuidad en un punto). Sea $f: I\subset R \to R$ una función real que está definida sobre el intervalo abierto I de números reales que contiene al punto x_0. Se dice que f es continua en x_0 si cumple con la igualdad: $\underset{x\to x_0}{Lím} f(x) = f(x_0)$

OBSERVACIÓN. Viendo esta definición por separado se dirá que una función $f: I\subset R \to R$ es continua en el punto $x_0 \in I$ si cumple estas tres condiciones:

i) Existe f el punto x_0: Existe $f(x_0)$

ii) Existe el límite cuando $x \to x_0$: Existe $\underset{x\to x_0}{Lím} f(x)$

iii) Los dos resultados anteriores son iguales: $\underset{x\to x_0}{Lím} f(x) = f(x_0)$

Ejemplo 1. ¿Será la función $f(x) = \begin{cases} x^2+2, x \le 0 \\ \frac{2\,Sen\,x}{x}, x > 0 \end{cases}$ continua en $x_0 = 0$?

Solución. A fin de determinar que sea continua, esta debe cumplir lo siguiente: $\underset{x\to x_0}{Lím} f(x) = f(x_0)$.

Para la existencia del límite, los límites laterales por la derecha e izquierda deben ser iguales. Veamos:

i) Existe $f(x_0) = f(0) = 2$.

ii) Debe existir $\underset{x\to x_0}{Lím} f(x)$. Para este tipo de funciones se usará límites laterales:

Por la izquierda de $x_0 = 0$: $\underset{x\to x_0^-}{Lím} f(x) = \underset{x\to 0^-}{Lím} f(x) = \underset{x\to 0^-}{Lím}(x^2+2) = 2$,

Por la derecha de $x_0 = 0$: $\underset{x\to x_0^+}{Lím} f(x) = \underset{x\to 0^+}{Lím} f(x) = \underset{x\to 0^+}{Lím} \frac{2Sen\,x}{x} = 2$, Esto significa que el límite existe: $\underset{x \to 0}{Lím} f(x) = 2$.

iii) Se cumple que $\underset{x \to 0}{Lím} f(x) = 2 = f(0)$.

Por tanto, la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, x \leq 0 \\ \frac{2\ Sen\ x}{x}, x > 0 \end{cases}$ es continua en $x_0 = 0$.

EJEMPLO DE APLICACIÓN. Durante una cirugía a corazón abierto, este se enfría para retardar su comportamiento normal. En la figura adjunta se muestra el flujo de sangre de cierto paciente a medida que se enfriaba su corazón. El hueco en la gráfica (para $t_o = 2$) representa un momento en que, por razones fuera de control, no se registró dato alguno.

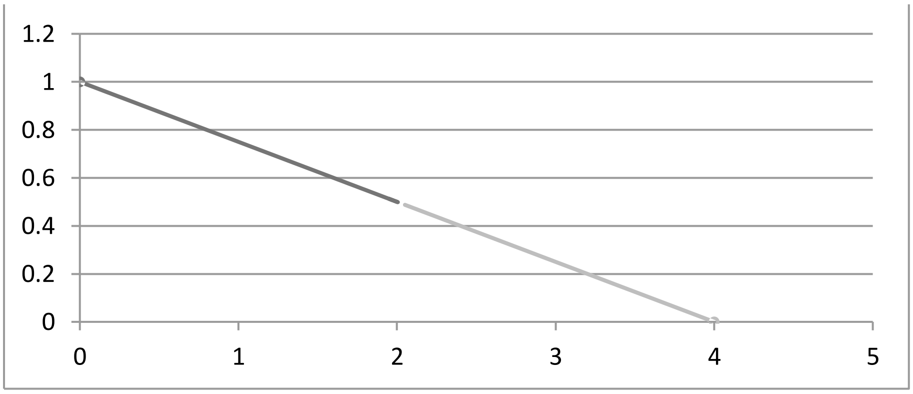

Figura 2.25

a) Hallar el límite de $f(t) = 1 - \frac{t}{4}$, cuando t tiende a 2, donde $y = f(t)$ representa el flujo de sangre a t grados, inferior a la temperatura normal del cuerpo (ver figura anterior).

Rpta. $f(2) = \frac{1}{2} = 0{,}5$ es el flujo sanguíneo cuando la temperatura baja 2 grados desde la temperatura normal del cuerpo.

b) ¿Es f continua en $t = 2$?

Rpta. No lo es, pues $y = f(t)$ no está definida para $t = 2$.

c) El hueco en la gráfica ocurre cuando hay una catástrofe, como por ejemplo una falla mecánica.

2.9. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS

Sean $f: I \subset R \to R$ y $g: I \subset R \to R$ funciones reales definidas en el intervalo abierto I, para las funciones f y g continuas en el punto $x_0 \in I$ y siendo k un número real, se concluye que también son continuas en x_0 las siguientes funciones:

i) Suma $(f+g)(x)$

i) Diferencia $(f-g)(x)$

iii) Producto $(f \cdot g)(x)$

iv) Cociente $(f/g)(x)$, con $g(x) \neq 0$

v) Producto por un escalar $(k \cdot f)(x)$

Ejemplo 1. La función $f(x) = x^2 - 2x$ es continua en $x_0 = 1$ y la función $g(x) = 2 + 5x$ es continua en $x_0 = 1$, entonces la función suma $(f+g)(x) = x^2 + 3x + 2$ también es continua en el punto $x_0 = 1$. En efecto:

i) La función $f(x) = x^2 - 2x$ es continua en $x_0 = 1$ si cumple lo siguiente:

i) Existe $f(x_0) = f(1) = -1$.

ii) Debe existir $\underset{x \to x_0}{Lím} f(x) = \underset{x \to 1}{Lím} f(x) = \underset{x \to 1}{Lím}(x^2 - 2x) = -1$,

iii) Se cumple que $\underset{x \to 1}{Lím} f(x) = -1 = f(1)$.

Por lo tanto, la función $y = f(x)$ es continua en $x_0 = 1$.

ii) La función $g(x) = 2 + 5x$ es continua en $x_0 = 1$ si cumple estos requisitos:

i) Existe $g(x_0) = g(1) = 7$.

ii) Debe existir $\underset{x \to x_0}{Lím} g(x) = \underset{x \to 1}{Lím} g(x) = \underset{x \to 1}{Lím}(2 + 5x) = 7$,

iii) Se cumple que $\underset{x \to 1}{Lím} g(x) = 7 = g(1)$.

En consecuencia, la función $y = g(x)$ es continua en $x_0 = 1$.

iii) Entonces la función suma $(f+g)(x) = x^2 + 3x + 2$ es continua en $x_0 = 1$ si se dan las siguientes condiciones:

i) Existe $(f+g)(x_0) = (f+g)(1) = 6$.

ii) Debe existir $\underset{x \to x_0}{Lím}(f+g)(x) = \underset{x \to 1}{Lím}(f+g)(x) = \underset{x \to 1}{Lím}(x^2 + 3x + 2) = 6$,

iii) Se cumple que $\underset{x \to 1}{Lím}(f+g)(x) = 6 = (f+g)(1)$.

Por ende, la función suma $y = (f+g)(x)$ es continua en $x_0 = 1$. Esto se observa en la Figura 2.26.

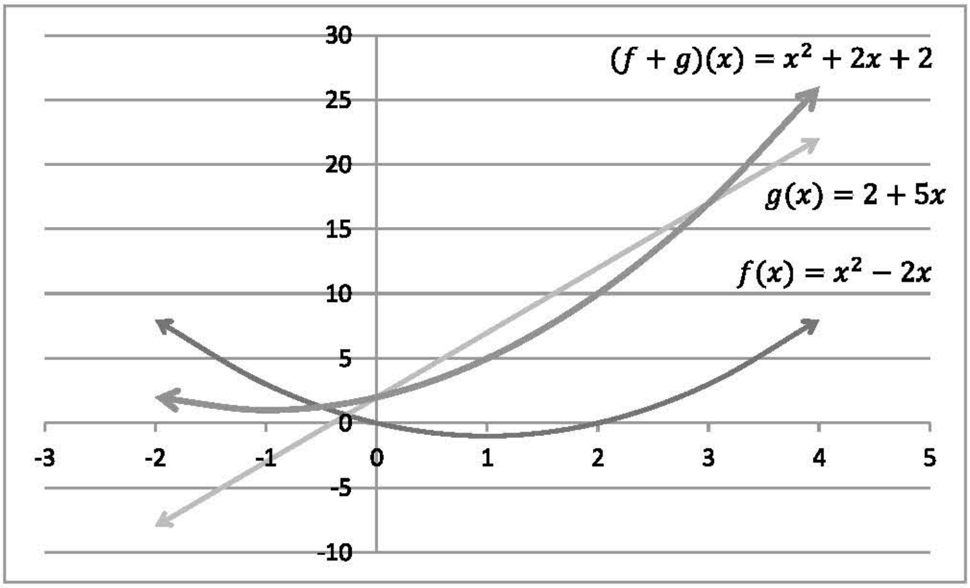

Figura 2.26

Ejemplo 2. La función $f(x) = \sqrt{x-1}$ es continua en $x_0 = 5$, entonces la función producto por el escalar $k = 2$, $(2f)(x) = 2\sqrt{x-1}$ también es continua en el punto $x_0 = 5$. En seguida se muestra que si se cumple:

i) La función $f(x) = \sqrt{x-1}$ es continua en $x_0 = 5$ si satisface estas condiciones:

i) Existe $f(x_0) = f(5) = 2$.

ii) Debe existir $\underset{x\to x_0}{Lím} f(x) = \underset{x\to 5}{Lím} f(x) = \underset{x\to 5}{Lím} \sqrt{x-1} = 2$,

iii) Se cumple que $\underset{x\to 5}{Lím} f(x) = 2 = f(5)$.

Por lo tanto, la función $y = f(x)$ es continua en $x_0 = 5$.

ii) La función producto por el escalar $k = 2$, $(2f)(x) = 2\sqrt{x-1}$ es continua en $x_0 = 5$ si cumple lo siguiente:

i) Existe $(kf)(x_0) = (2f)(5) = 4$.

ii) Debe existir $\underset{x\to x_0}{Lím}(2f)(x) = \underset{x\to 5}{Lím}(2f)(x) = \underset{x\to 5}{Lím}(2\sqrt{x-1}) = 4$,

iii) Se cumple que $\underset{x\to 5}{Lím}(2f)(x) = 4 = (2f)(5)$.

Entonces, la función producto por el escalar $k = 2$, $y = (2f)(x)$ es continua en $x_0 = 5$.

Esto se precisa en la Figura 2.27.

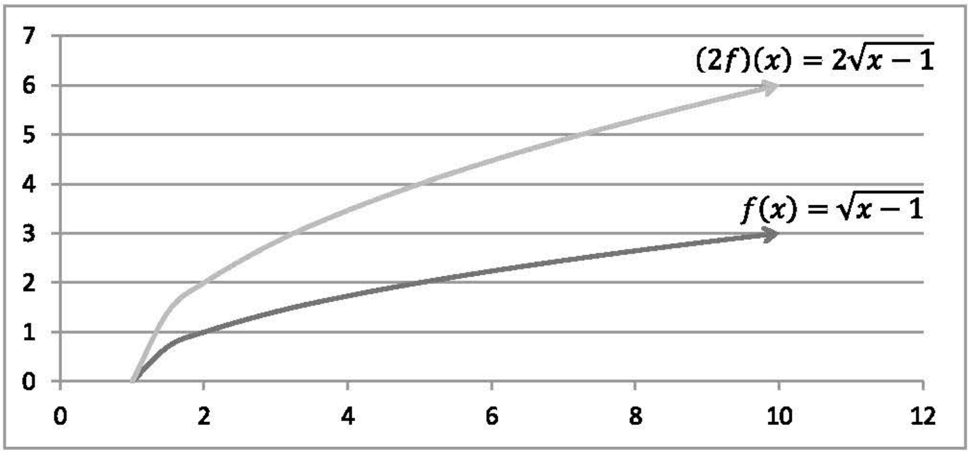

Figura 2.27

2.10. DISCONTINUIDAD EVITABLE E INEVITABLE

Sea $f: I \subset R \rightarrow R$ una función real definida en el intervalo abierto I, se dice que la función f es discontinua en $x_0 \in I$, si y solo si f no es continua en x_0; las discontinuidades pueden ser de dos tipos:

i) Discontinuidad Evitable. Cuando f puede hacerse continua definiéndola o redefiniéndola en x_0; el valor de definición o redefinición es $f(x) = \underset{x \to x_0}{Lim} f(x)$.

ii) Discontinuidad Inevitable. Cuando aun definiéndola o redefiniéndola en x_0, esta no se hace continua, la función en este caso da un salto en x_0.

Ejemplo 1. La función $f(x) = x^3 - 3x + 6$ es continua en el intervalo $J = [-3; 3]$ como se muestra en la Figura 2.28:

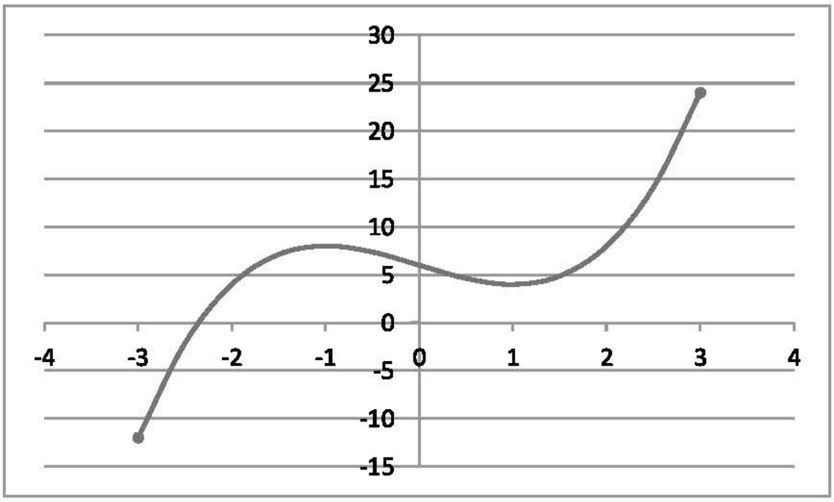

Figura 2.28

Ejemplo 2. La función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ no es continua en $x_0 = 2$, pues $f(2)$ no está definida; sin embargo, se la puede hacer continua definiéndola en $x_0 = 2$ mediante $f(2) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ $= \lim_{x\to 2} (x+2) = 4$.

La función hecha continua (en todo R) quedará definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & si\ x \neq 2 \\ 2, si\ x = 2 \end{cases}$.

Ejercicio. Hágase continua a la función $f(x) = \frac{4x^2-2x}{x}$ definiéndola en su punto de discontinuidad.

EJEMPLO DE APLICACIÓN. La población de ciertos peces cambia cuando un contaminante químico cae repentinamente en un lago. Supóngase que la población piscícola P(t) (en miles) en el tiempo t (en días), tanto antes como después del accidente, se modela por

$$P(t) = \begin{cases} 6\left(\frac{t^2+5}{19t+25}\right)^{1/2}, 0 \leq t < 5 \\ 6\left(\frac{t}{t^2+25}\right)^{1/3}, t > 5 \end{cases}$$

Analice la discontinuidad en $t = 5$, cuando ocurrió el derrame. Haga cálculos para $t = 3$, $t = 4$, $t = 6$, $t = 8$, luego compare e interprete.

Solución.

El límite por la izquierda es $\lim_{x\to 5^-} 6\left(\frac{t^2+5}{19t+25}\right)^{1/2} = 3$.

El límite por la derecha es $\lim_{x\to 5^+} 6\left(\frac{t}{t^2+25}\right)^{1/3} = 2{,}785$.

Esto quiere decir que la población de peces decae súbitamente en $t = 5$ días de 3 000 a 2 785; en consecuencia, murieron 215 peces. La gráfica correspondiente se muestra en la Figura 2.29.

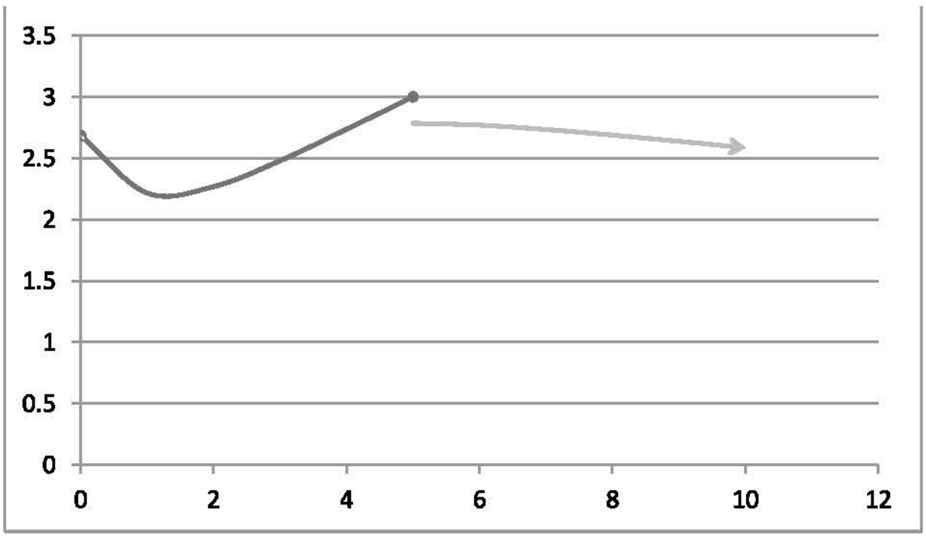

Figura 2.29

En seguida se calcula la cantidad de peces para otros tiempos.

Para $t = 3, P(3) = 2\,479$ Para $t = 4, P(4) = 2\,735$

Para $t = 5, P(5) = 3000$ Para $t = 6, P(6) = 2\,769$

Para $t = 8, P(8) = 2\,687$

Observamos que la población venía creciendo hasta cuando $t = 5$, en el que alcanzó los 3 000 peces y luego del accidente, la población empieza a disminuir.

2.11. DOMINIO DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN REAL. CONTINUIDAD POR INTERVALOS

CONTINUIDAD POR INTERVALO. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real definida en el intervalo abierto I, la función $f(x)$ es continua sobre el intervalo abierto $I = \langle a; b \rangle$ de números reales, si $f(x)$ es continua en cada punto del intervalo I. La función f es discontinua si ella no es continua en algún valor x de I.

Ejemplo 1. Son modelos de funciones continuas por intervalo los siguientes:

i) Función lineal: $f(x) = mx + b$, continua en todo R.

ii) Función polinómica: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

donde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son números reales con $a_n \neq 0$ y "n" es un número entero positivo por el cual el polinomio es de grado n. Es continua en todo R.

iii) Son también continuas en todo R la función constante $f(x) = C$, C =constante; y, la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

Ejemplo 2. Funciones continuas en sus dominios:

i) Si $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3x + 4}$ es continua en $\boldsymbol{Dom(f) = \mathrm{R}}$ y $\boldsymbol{g(x) = |2x - 3|}$ es continua en $\boldsymbol{Dom(g) = \mathrm{R}}$, entonces:

La función suma $\boldsymbol{(f + g)(x) = x^2 - 3x + 4 + |2x - 3|}$ es continua en $\boldsymbol{Dom(f + g) = \mathrm{R} \cap \mathrm{R} = \mathrm{R}}$.

ii) Si $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x - 3}$ es continua en $\boldsymbol{Dom(f) = \mathrm{R}}$ y $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{9 - x^2}}$ es continua en $\boldsymbol{Dom(g) = [-3; 3]}$, entonces:

La función cociente $\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2+2x-3}{\sqrt{9-x^2}}}$ es continua en $\boldsymbol{Dom(f/g) = \mathrm{R} \cap [-3; 3] = [-3; 3]}$.

Ejemplo 3. Hallar el dominio de continuidad de las siguientes funciones:

i) $\boldsymbol{f(x) = x^2 + x - \sqrt{x}}$. La función $\boldsymbol{f}$ tiene dos partes:

Primero, la función polinómica $x^2 + x$ es continua en todo R ; segundo, la función radical $\sqrt{x}$, es continua en el intervalo $[0; +\infty\rangle$; entonces, la función $f(x) = x^2 + x - \sqrt{x}$ es continua en el intervalo intersección $I = Don(f) = \mathrm{R} \cap [0; +\infty\rangle = [0; +\infty\rangle$.

ii) $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x}{x-3} - \sqrt{\frac{x(x+2)}{x-1}}}$. La función $\boldsymbol{f}$ tiene dos partes:

Por un lado, la función racional $\frac{2x}{x-3}$ es continua en todo $R - \{3\}$; por otro, la función radical $\sqrt{\frac{x(x+2)}{x-1}}$ es continua en el intervalo $[-2; 0] \cup \langle 1; +\infty\rangle$, que resulta de la condición $\frac{x(x+2)}{x-1} \geq 0$.

Entonces toda la función $f(x) = \frac{2x}{x-3} - \sqrt{\frac{x(x+2)}{x-1}}$ es continua en el intervalo intersección siguiente: $I = Don(f) = (\mathrm{R} - \{3\}) \cap ([-2; 0] \cup \langle 1; +\infty\rangle)$

$I = [-2; 0] \cup \langle 1; +\infty\rangle - \{3\}$.

CONTINUIDAD EN INTERVALO CERRADO.

Sea $f: I \subset R \to R$ una función real continua sobre el intervalo cerrado $I = [a, b]$ de números reales si $f(x)$ es continua en cada punto de abierto $I = \langle a; b\rangle$ y además:

a) f es continua por la derecha en a, es decir, existe $f(a) = \underset{x \to a^+}{Lím} f(x)$.

b) f es continua por la izquierda en b, es decir, existe $f(b) = \underset{x \to b^-}{Lím} f(x)$.

Ejemplo 4. La función $f(x) = x^2 - 2x - \sqrt{x}$ es continua en el intervalo abierto $I = \langle 0; 16\rangle$ y también lo es en el intervalo cerrado $I = [0; 16]$, pues existen los límites laterales como se ven a continuación:

a) f es continua por la derecha en $a = 0$, esto significa que existe $f(0) = \underset{x \to 0^+}{Lím} f(x)$

$= \underset{x \to 0^+}{Lím} (x^2 - 2x - \sqrt{x}) = 0$.

b) f es continua por la izquierda en $b = 16$, es decir, existe $f(16) = \underset{x \to 16^-}{Lím} f(x)$

$= \underset{x \to 16^-}{Lím} (x^2 - 2x - \sqrt{x}) = 220$.

Lo anterior muestra que la función es continua en el intervalo cerrado $I = [0; 16]$. (Ver Figuras 2.30 y 2.31).

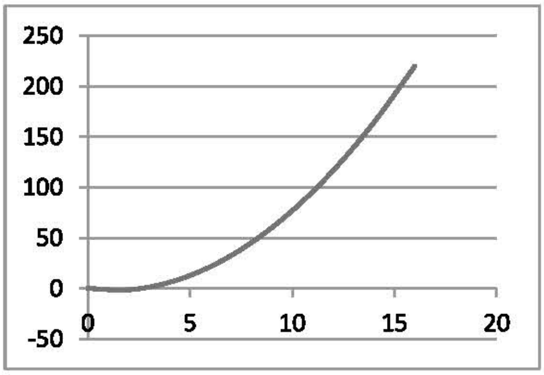

Figura 2.30

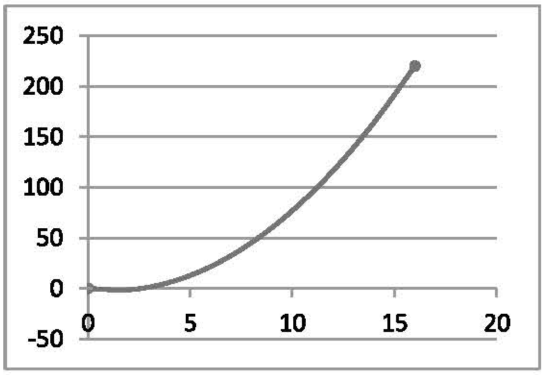

Figura 2.31

TEOREMAS ESPECIALES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS.

LA CONTINUIDAD EN SUB-INTERVALO. Si una función $y = f(x)$ es continua en su dominio teórico $Dom(f)$, entonces formalmente se espera que también sea continua en cualquier subintervalo $J \subset Dom(f)$.

DEFINICIÓN. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real definida en el intervalo abierto I, si f es continua en I y el intervalo $J \subset I$, entonces f es continua en J.

Ejemplo 5. La función $f(x) = \sqrt{2x+6}$ es continua en el intervalo $Dom(f) = [-3; +\infty\rangle$, entonces dicha función será continua en el intervalo $J = \langle 0; 25\rangle$.

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO. Si $f: I \subset R \to R$ una función real continua en el intervalo cerrado $I = [a; b]$, si $f(a) < f(b)$ y k es un número real tal que $f(a) < k < f(b)$, entonces existe (al menos) un valor $x_0 \in \langle a; b\rangle$ tal que $k = f(x_0)$.

Ejemplo 6. Considere la altura de una persona. Si un niño mide 150 cm los 13 años y 170 cm al cumplir 14, entonces en algún momento intermedio midió 160 cm. Lo cual parece razonable si pensamos que la persona crece de forma continua sin dar saltos bruscos en el crecimiento.

Ejemplo 7. Sea la función $f(x) = (x-2)^2$ continua en el intervalo $I = [2; 6]$, como $f(2) < f(6)$ sea $k = 4$, encuentre el valor $x_0 \in [2; 6]$ para el cual $f(x_0) = 4$.

Se tiene que $f(x_0) = 4 \;\to\; (x_0 - 2)^2 = 4 \;\to\; x_0 - 2 = \pm 2$; sin embargo, como el intervalo dado es $I = [2; 6]$, entonces $x_0 - 2 = 2 \to x_0 = 4$.

Esto también se observa en la Figura 2.32.

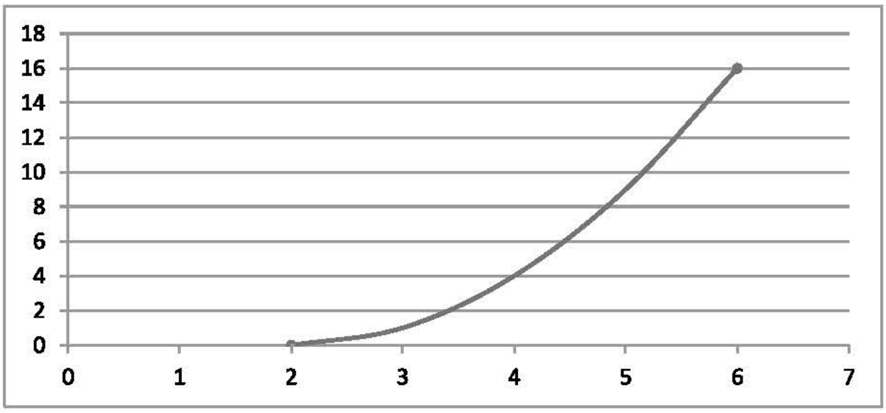

Figura 2.32

TEOREMA DEL CERO. Si $f: I \subset R \rightarrow R$ una función real continua en el intervalo cerrado $I = [a; b]$ y si $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos; en consecuencia, existe un valor $x_0 \in \langle a; b \rangle$ tal que $f(x_0) = 0$.

Ejemplo 8. La función $f(x) = 4 - x^2$ continua en el intervalo $I = [0; 4]$, como $f(0) = 4 > 0$ y $f(4) = -12 < 0$ tienen signos diferentes, por lo que existe el valor $x_0 \in [0; 4]$ para el cual $f(x_0) = 0$.

En efecto, $4 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$; sin embargo, como el intervalo es $I = [0; 4]$, entonces $x = 2$, para lo cual se cumple $f(2) = 0$. (Ver Figura 2.33).

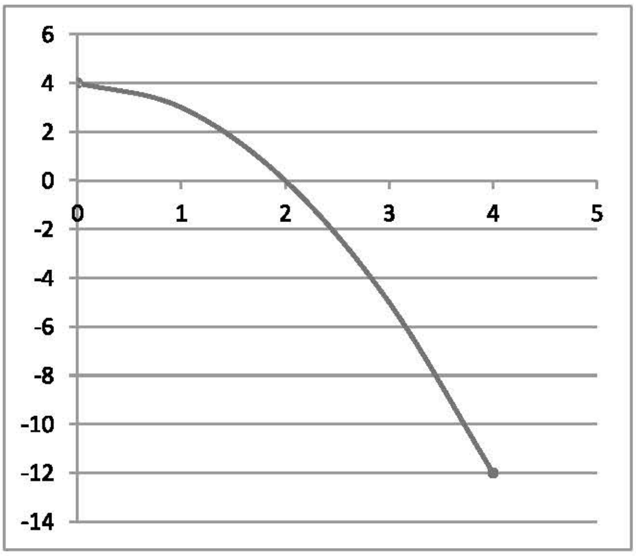

Figura 2.33

TEOREMA DEL VALOR MÍNIMO Y DEL VALOR MÁXIMO.

DEFINICIÓN (MÍNIMO). Si J es un conjunto contenido en el dominio de la función f, $Dom(f)$ entonces se dice que f tiene un valor mínimo sobre J de existir un valor $x_0 \in J$ tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in J$.

DEFINICIÓN (MÁXIMO). Si J es un conjunto contenido en el dominio de la función f, $Dom(f)$ entonces se dice que f tiene un valor máximo sobre J de existir un valor $x_0 \in J$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in J$.

TEOREMA. Sea $f: I \subset R \to R$ una función real continua en el intervalo cerrado $I = [a; b]$; en consecuencia, f tiene un valor mínimo y un valor máximo sobre $I = [a; b]$.

Ejemplo 9. La función $(x) = x^3 - 2x + 2$ es continua en el intervalo cerrado $Dom(f) = [-3; 3]$, por lo que dicha función tiene su valor mínimo $m = f(-3) = -19$ y su valor máximo $M = f(3) = 23$. (Ver Figura 2.34).

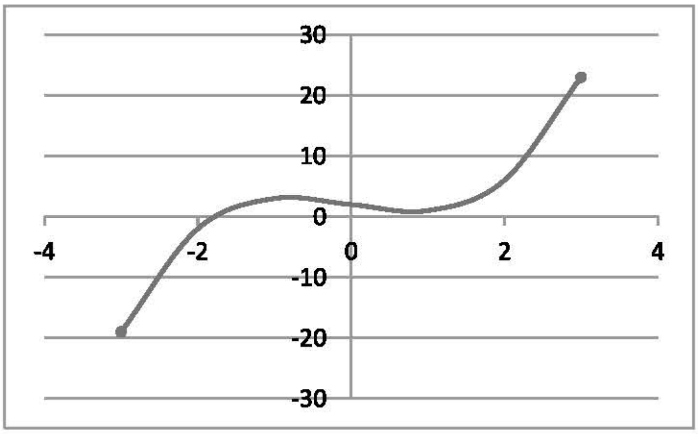

Figura 2.34

Ejemplo 10. La función $(x) = x^2 - x - 2$ es continua en el intervalo cerrado $Dom(f) = [-2; 5]$, por ende, dicha función tiene su valor mínimo $m = f(0{,}5) = -2{,}25$ y su valor máximo $M = f(5) = 18$. Lo que se grafica en la Figura 2.35.

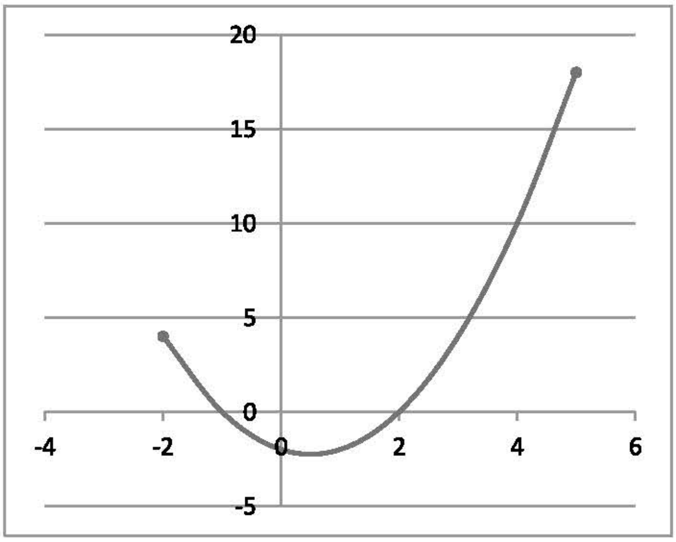

Figura 2.35

FORMAS INDETERMINADAS ESPECIALES.

Ejemplo 1. Siendo $f(x) = 4x - x^2$, calcular $F(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Solución.

$$F(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[4(x+h)-(x+h)^2]-[4x-x^2]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4x+4h-x^2-2xh-h^2-4x+x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h-2xh-h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(4-2x-h)}{h} = \lim_{h\to 0} (4-2x-h) = 4-2x.$$

Ejemplo 2. Siendo $f(x) = x^2 + x$, calcular $F(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Solución.

$$F(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)]-[x^2+x]}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{x^2+2x(\Delta x)+(\Delta x)^2+x+\Delta x-x^2-x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2x(\Delta x)+(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x+1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (2x+\Delta x+1) = 2x+1.$$

Ejemplo 3. Siendo $f(x) = \frac{5}{x+1}$, calcular $F(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

Solución.

$$F(x) = \lim_{\Delta x\to 0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{5}{(x+\Delta x)+1} - \frac{5}{x+1}\right] = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{-5(\Delta x)}{(x+\Delta x+1)(x+1)}\right] = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-5}{(x+\Delta x+1)(x+1)}$$

$$= \frac{-5}{(x+1)(x+1)} = \frac{-5}{(x+1)^2}$$

Ejemplo 4. Siendo $f(t) = \sqrt{4t+3}$, calcular $F(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$

Solución.

$$F(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\sqrt{4(t+\Delta t)+3}-\sqrt{4t+3}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\sqrt{4(t+\Delta t)+3}-\sqrt{4t+3}}{\Delta t} \cdot \frac{\sqrt{4(t+\Delta t)+3}+\sqrt{4t+3}}{\sqrt{4(t+\Delta t)+3}+\sqrt{4t+3}}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{4(t+\Delta t)+3-(4t+3)}{\Delta t(\sqrt{4(t+\Delta t)+3}+\sqrt{4t+3})} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{4\Delta t}{\Delta t(\sqrt{4(t+\Delta t)+3}+\sqrt{4t+3})} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{4}{\sqrt{4(t+\Delta t)+3}+\sqrt{4t+3}} = \frac{4}{\sqrt{4t+3}+\sqrt{4t+3}} = \frac{2}{\sqrt{4t+3}}$$

OBSERVACIÓN. Estas formas indeterminadas servirán precisamente para definir la derivada de una función real, tal como se verá más adelante.

2.12. LISTA DE EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIOS DE LÍMITES DE UNA FUNCIÓN REAL.

1. Realice la gráfica de la función $f(x)=\frac{x^2-36}{x-6}$ y calcule $L=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$; $L=\lim\limits_{x\to 6} f(x)$; $L=\lim\limits_{x\to 8} f(x)$

2. Calcular los siguientes límites:

a) $L=\lim\limits_{x\to 3}(10)$

b) $L=\lim\limits_{x\to 4}(x^2-4x+15)$

c) $L=\lim\limits_{x\to -3}(x^3+5x-11)$

d) $L=\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2)^3(4x-12)^2$

e) $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+4}{x^2+2+3}$

f) $L=\lim\limits_{x\to 7}\sqrt{x^2+15}$

g) $L=\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{x^6+25x+9}$

3. Calcular los siguientes límites:

a) $L=\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}$

b) $L=\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{4-x}-\frac{1}{4}\right)$

c) $L=\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\frac{9x^2-1}{3x+1}$

d) $L=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{x-1}{x^2-2x+1}\right)$

4. Calcular los siguientes límites:

a) $L=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

b) $L=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

c) $L=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$

5. Calcular los siguientes límites:

a) $L=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3-2x-3x^2}{5+x-9x^2}$

b) $L=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x^5-2x^3-3x}{5x^5+2x^2-9x}$

c) $L=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3-x-3x^3}{4+3x-9x^2}$

d) $L=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x+8}}{5x}$

6. Calcular los siguientes límites:

a) $L=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\frac{4}{x-3}\right)$

b) $L=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\frac{4}{x-3}\right)$

c) $L=\lim\limits_{x\to 4^-}\left[\frac{4}{(x-4)^2}\right]$

d) $L=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\frac{-2}{(x-1)^2}\right]$

EJERCICIOS SOBRE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIóN REAL.

1. Realice la gráfica de las funciones dadas y determine si son continuas en el punto que se indica:

a) $f(x) = |x+2|$, en $x_0 = 2$ b) $f(x) = \sqrt{x+4}$, en $x_0 = 2$.

c) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$, en $x_0 = 3$

2. Analice si las funciones dadas son continuas en el punto que se indica:

a) $f(x) = \begin{cases} x^3+1, & x \leq 1 \\ x+2, & x > 1 \end{cases}$, en $x_0 = 1$. b) $f(x) = \begin{cases} 1+\frac{x}{2}, & x \leq 2 \\ 4-x, & x > 2 \end{cases}$, en $x_0 = 2$.

3. Hallar el dominio de continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + 10x - 25$ b) $f(x) = \sqrt{6-x}$ c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

d) $f(x) = \frac{x-3}{x-2}$ e) $f(x) = Ln(4x-2)$ f) $f(x) = Cos(2x)$

g) $f(x) = 2^x$ h) $f(x) = \frac{x^3-27}{x-3}$

4. Hay dos tipos de discontinuidad; de dos ejemplos, uno es de discontinuidad esencial y el otro de discontinuidad evitable. Para este último caso, hacerla continua.