Capítulo III

DERIVADA DE LAS FUNCIONES REALES

CAPÍTULO III

DERIVADA DE LAS FUNCIONES REALES

CONTENIDO

3.1. Génesis de la derivada. Definición de la derivada de una función real.

3.2. Problemas clásicos que requieren derivada. La derivada como razón de cambio.

3.3. Pendiente y recta tangente y recta normal a una curva.

3.4. Obtención de algunas reglas usando la definición de derivada. Reglas de derivación.

3.5. Cálculo de la derivada de diversas funciones reales.

3.6. La regla de la cadena o derivada de funciones compuestas.

3.7. Derivadas de orden superior.

3.8. Derivación implícita.

3.9. Incremento y diferencial de una función real.

3.10. Lista de ejercicios propuestos.

3.1. GÉNESIS DE LA DERIVADA. DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL

GÉNESIS DE LA DERIVADA.

La derivada de una función real $y = f(x)$ es un concepto matemático que surge con el planteamiento de dos problemas clásicos: "la búsqueda de la velocidad de un móvil en cada punto de su recorrido" y "la búsqueda de la tangente a una curva"; en esencia, ambos problemas tienen el mismo objetivo: la búsqueda de la variación de una magnitud con respecto a otra.

La precisión de la idea de límite ayuda en la resolución de los problemas arriba mencionados, introduciendo el concepto de derivada.

La forma en que aquí se presenta a la derivada, es haciendo uso del límite de las funciones reales. Cabe resaltar que la idea de derivada surgió desde las aplicaciones y se la formalizó teóricamente dándole un rigor matemático. Ahora en los textos se trata de retornar al primer proceso, es decir, que se entienda el concepto de la derivada y luego usarla en diversas aplicaciones.

El concepto de derivada tiene diversas interpretaciones, dependiendo del campo específico del conocimiento en el cual se esté empleando. Veamos un ejemplo aplicado al aprendizaje de una persona.

Ejemplo 1. Al dejar caer un objeto, este alcanzará una distancia de $S = 16t^2$ pies en t segundos.

a) Hallar su velocidad promedio al cabo de 3 segundos.

b) Hallar la velocidad instantánea al cabo de 3 segundos.

Solución.

a) La razón de cambio promedio (RCP) se calcula de la fórmula "cociente de la distancia recorrida del tiempo 1 al tiempo 2 entre la diferencia de los tiempos 1 y 2", es decir, $RCP = \frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}$. Veamos:

De 3 a 3,5: $RCP = \frac{S(3,5)-S(3)}{3,5-3} = \frac{52}{0,5} = 104$ pies por segundo.

De 3 a 3,1: $RCP = \frac{S(3,1)-S(3)}{3,1-3} = \frac{9,76}{0,1} = 96,7$ pies por segundo.

De 3 a 3,01: $RCP = \frac{S(3,01)-S(3)}{3,01-3} = \frac{0,9616}{0,01} = 96,16$ pies por segundo.

De 3 a 3,001: $RCP = \frac{S(3,001)-S(3)}{3,001-3} = \frac{0,096016}{0,001} = 96,016$ pies por segundo.

Todas estas son aproximaciones de la velocidad al cabo de tres segundos.

b) La razón de cambio instantáneo (*RCI*) se obtendrá de "llevar al límite el cociente de la distancia recorrida del tiempo 1 al tiempo 2 entre la diferencia de los tiempos 1 y 2". Esto se logra aplicando el concepto de límite a la función que modela este hecho.

La razón de cambio instantáneo es dada por $RCI = \underset{t \to t_1}{Lím} \frac{S(t)-S(t_1)}{t-t_1}$, veamos:

$RCI = \underset{t \to t_1}{Lím} \frac{S(t)-S(t_1)}{t-t_1} = \underset{t \to 3}{Lím} \frac{16t^2-144}{t-3} = \underset{t \to 3}{Lím} \frac{16(t-3)(t+3)}{t-3} = \underset{t \to 3}{Lím} 16(t+3) = 96$ pies por segundo; que es la velocidad cuando $t = 3$ segundos.

Ejemplo 2. Cierta persona que *aprende a digitar un teclado* tiene una mejora que se modela aproximadamente con la función real $N(t) = 60\left(1 - \frac{2}{t}\right)$, con $3 \leq t \leq 10$; donde $N(t)$ es el número de palabras por minuto y "t" es el tiempo de aprendizaje en semanas.

a) Calcular la razón de cambio promedio (velocidad promedio) del número de palabras por minuto para un cambio en el tiempo de 4 a 6 semanas; de 4 a 5; de 4 a 4,5; de 4 a 4,2; de 4 a 4,1 y así sucesivamente acercándose cada vez más a $t = 4$.

b) Calcular la razón de cambio instantáneo (velocidad instantánea) para cuando $t = 4$ semanas.

Solución.

a) La razón de cambio promedio (RCP) se calcula de la fórmula "cociente de las palabras aprendidas desde el tiempo 1 al tiempo 2 entre la diferencia de los tiempos 1 y 2", es decir, $RCP = \frac{N(t_2)-N(t_1)}{t_2-t_1}$. Veamos:

De 4 a 6: $RCP = \frac{N(6)-N(4)}{6-4} = 5$ palabras por minuto, por semana.

Significa que al pasar de la semana 4 a la 6, la persona aprende a una velocidad de 5 palabras por minuto cada semana, en promedio.

De 4 a 5: $RCP = 6$ palabras por minuto, por semana.

De 4 a 4,5: $RCP = 6{,}66$ palabras por minuto, por semana.

De 4 a 4,2: $RCP = 7{,}14$ palabras por minuto, por semana.

De 4 a 4,1: $RCP = 7{,}32$ palabras por minuto, por semana.

De estos cálculos se deduce que *cuanto más cerca se está* de $t = 4$, la velocidad de aprendizaje se aproxima a 7,5 palabras por minuto, cada semana.

b) La razón de cambio instantáneo (*RCI*) se obtendrá de "llevar al límite el cociente de la diferencia de la cantidad de palabras aprendidas desde el tiempo t hasta el tiempo 1 fijo entre la diferencia del tiempo t y tiempo 1". Esto se logra aplicando el concepto de límite a la función que modela este hecho, el cual se calcula de dos formas:

(i) La razón de cambio instantáneo es dada por $RCI = \underset{t\to t_1}{Lím} \frac{N(t)-N(t_1)}{t-t_1}$, veamos:

$RCI = \underset{t\to t_1}{Lím} \frac{N(t)-N(t_1)}{t-t_1} = \underset{t\to 4}{Lím} \frac{60\left(1-\frac{2}{t}\right)-30}{t-4} = \underset{t\to 4}{Lím} \frac{30}{t} = 7{,}5$ palabras por minuto, por semana; se trat de la velocidad cuando $t = 4$ semanas, exactamente al finalizar la cuarta semana de aprendizaje.

(ii) Una forma equivalente del anterior límite se obtiene haciendo que la diferencia $h = t - t_1$ se oriente a cero en el límite, del modo siguiente:

$$RCI = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{N(t_1+h)-N(t_1)}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{60\left(1-\frac{2}{4+h}\right)-60\left(1-\frac{2}{4}\right)}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{1}{h}\left(30 - \frac{120}{4+h}\right)$$

$$= \underset{h\to 0}{Lím} \frac{1}{h}\left(\frac{120+30h-120}{4+h}\right) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{1}{h}\left(\frac{30h}{4+h}\right) = \underset{h\to 0}{Lím} \left(\frac{30}{4+h}\right) = 7{,}5$$

Este último límite, o su equivalente, será precisamente la definición de la derivada de una función real.

DEFINICIÓN DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL. La derivada de una función real de variable real $f: I \subset R \to R$ definida en el intervalo I, en el punto de acumulación $x \in I$ es dada por otra función que se denota por $\frac{df(x)}{dx}$ y es planteada mediante el límite $\frac{df(x)}{dx} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, siempre que este límite exista.

El dominio de la función derivada $\frac{df(x)}{dx}$ es el conjunto de valores "x" del $Dom(f)$ para los cuales el límite anterior existe.

OBSERVACIÓN 1. Sobre la derivada de una función real se puede señalar lo siguiente:

i) Otras formas de denotar la derivada son $\frac{df(x)}{dx}$, $D_x f(x)$, $D_x y$, y', $f'(x)$.

Una de las notaciones más usada es $y' = f'(x)$. Es decir, $f'(x) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

ii) Una función $f: I \subset R \to R$ se dice derivable en "$x \in I$", cuando existe su derivada en ese $x \in I$.

iii) Cuando la derivada se estima en un valor de x_0, se obtiene un número real $f'(x_0) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, el cual se interpreta de acuerdo al campo en donde se esté aplicando.

iv) El proceso de hallar la derivada es llamado *derivación*.

v) Se dice que una función $y = f(x)$ es derivable en un intervalo I, si lo es en cada valor $x \in I$.

OBSERVACIÓN 2. Sobre una función y su derivada se puede decir lo siguiente:

i) En las aplicaciones una función real $y = f(x)$ sirve para *describir* un hecho, un suceso o para representar una magnitud.

ii) La derivada de dicha función real $y' = f'(x)$ sirve para describir la *variación* de dicho hecho, suceso o magnitud con respecto a la variable x.

iii) Cuando el valor de la derivada es positivo $(+)$, quiere decir que la magnitud está aumentando, y cuando es negativo $(-)$ significa que la cantidad está disminuyendo.

Ejemplo 1. Aplicando la definición con el límite, hallar la derivada de la función $f(x) = x^2 - 4x$, luego evaluarla en $x_0 = 4$.

Solución. Aplicando la definición:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^2-4(x+h)]-[x^2-4x]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-4x-4h-x^2+4x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2-4h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h-4)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h-4) = 2x-4.$$

Es decir, la derivada de la función real $f(x) = x^2 - 4x$ es la función $f'(x) = 2x - 4$.

Al evaluar la derivada para $x_0 = 4$, se obtiene $f'(4) = 2(4) - 4 = 4$.

Ejemplo 2. (PROBLEMA) La función $P(t) = 55t - 0{,}1t^3$ mide la cantidad de toneladas de cobre que una minera produce al cabo de t horas de operación. Calcular e interpretar $P(3)$ y $P'(3)$.

Solución. Siendo $P(t) = 55t - 0{,}1t^3$, entonces la derivada será:

$$P'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{P(t+h)-P(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{55(t+h)-0{,}1(t+h)^3-(55t-0{,}1t^3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{55t+55h-0{,}1(t^3+3t^2h+3th^2+h^3)-55t+0{,}1t^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{55t+55h-0{,}1t^3-0{,}3t^2h-0{,}3th^2-0{,}1h^3-55t+0{,}1t^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{55h-0{,}3t^2h-0{,}3th^2-0{,}1h^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(55-0{,}3t^2-0{,}3th-0{,}1h^2)}{h} = 55-0{,}3t^2$$

Esto significa que la derivada resulta $P'(t) = 55 - 0{,}3t^2$.

Luego, $P(3) = 55(3) - 0{,}1(3)^3 = 162{,}3$ toneladas (cantidad producida).

$P'(3) = 55 - 0{,}3(3)^2 = 52{,}3$ toneladas por hora (velocidad de producción).

Lo cual quiere decir que a la tercera hora de operación, se ha producido 162,3 toneladas de cobre y aumenta a una velocidad de 52,3 toneladas por hora.

OBSERVACIÓN. Más adelante se usarán reglas para derivar las funciones reales de forma más rápida, dichas reglas se pueden obtener desde la definición de derivada con límites.

3.2. PROBLEMAS CLÁSICOS QUE REQUIEREN DE LA DERIVADA. LA DERIVADA COMO RAZÓN DE CAMBIO

INTERPRETACIONES DE LA DERIVADA.

Dependiendo del campo en donde se esté aplicando, la derivada de una función se puede interpretar de diversas formas: Razón de cambio, rapidez, velocidad instantánea, pendiente de una recta tangente, tasa de crecimiento, variación…

PROBLEMAS CLÁSICOS QUE REQUIEREN DE LA DERIVADA.

Problema 1. Pendiente de una recta tangente.

i) Una curva suave es aquella representada por una función real $f: I \subset R \to R$ que admite *derivada continua* en cada punto del intervalo abierto $I = \langle a; b \rangle$.

ii) La pendiente m de la recta tangente L_T en el punto $(x_0; y_0)$ de una curva representada por la función real $y = f(x)$ es dada por la derivada de dicha función evaluada en la abscisa x_0; es decir, $m = \frac{df(x_0)}{dx}$ o $m = f'(x_0)$.

Este hecho se logra al tomar la pendiente de una recta secante $m = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ a una curva suave representada por la función real $y = f(x)$ que pasa por los puntos $(x_0; f(x_0))$ y $(x_1; f(x_1))$ y luego aplicar el límite cuando $x_1 \to x_0$, entonces se consigue obtener la pendiente de la recta tangente en el punto $(x_0; f(x_0))$, esto es, $m = f'(x_0)$.

iii) La recta tangente en el punto $(x_0; y_0)$ es dada por la siguiente ecuación: $L_T: y - y_0 = m(x - x_0)$

Ejemplo 1. Hallar la pendiente de la recta tangente en el punto $(2; y_0)$ de la curva representada por la función $f(x) = \sqrt{6-x}$.

Solución. Se debe hallar la derivada de la función $f(x) = \sqrt{6-x}$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{6-(x+h)}-\sqrt{6-x}}{h} = Lím \frac{\sqrt{6-(x+h)}-\sqrt{6-x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{6-(x+h)}+\sqrt{6-x}}{\sqrt{6-(x+h)}+\sqrt{6-x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\left(\sqrt{6-(x+h)}+\sqrt{6-x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{\sqrt{6-(x+h)}+\sqrt{6-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{6-x}}$$

Es decir, $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{6-x}}$

La pendiente solicitada es $m = \frac{df(2)}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{6-2}} = -\frac{1}{4}$

También $f(2) = \sqrt{6-2} = 2$, es decir, $y_0 = 2$

La recta tangente es dada por $L_T: y - y_0 = m(x - x_0)$, siendo $x_0 = 2$, $y_0 = 2$, y $m = -\frac{1}{4}$

$L_T: y - 2 = -\frac{1}{4}(x-2)$ o $L_T: y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$. (Ver Figura 3.1.).

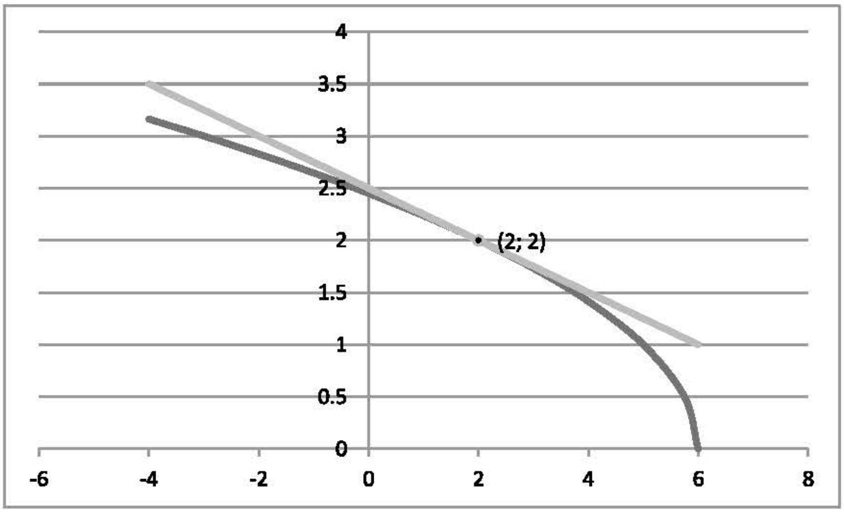

Figura 3.1

Problema 2. Velocidad de un móvil.

Ejemplo 2. (PROBLEMA) La velocidad de un automóvil que arranca del reposo es dada por $V(t) = \frac{100t}{2t+15}$, con V medida en metros por segundo y t el tiempo en segundos. Hallar:

a) Velocidad y aceleración luego de 1 segundo.
b) Velocidad y aceleración a los 5 segundos.
c) Velocidad y aceleración tras 10 segundos.
d) Velocidad y aceleración después de 20 segundos.
e) Calcular e interpretar $V = \underset{t\to+\infty}{Lím} V(t)$
f) Calcular e interpretar $A = \underset{t\to+\infty}{Lím} A(t)$

Solución.

La aceleración se obtiene como la derivada de la función velocidad: $A(t) = \frac{dV(t)}{dt} = \frac{1500}{(2t+15)^2}$

a) $V(1) = \frac{100}{17} = 5{,}8823$ m/s. $A(1) = \frac{1500}{(2+15)^2} = \frac{1500}{289} = 5{,}1903$ m/s^2.

b) $V(5) = \frac{500}{25} = 20$ m/s. $A(5) = \frac{1500}{(10+15)^2} = \frac{1500}{625} = 2{,}4$ m/s^2.

c) $V(10) = \frac{1000}{35} = 28{,}5714$ m/s. $A(10) = \frac{1500}{(20+15)^2} = \frac{1500}{1225} = 1{,}2244$ m/s^2.

d) $V(20) = \frac{2000}{55} = 36{,}3636$ m/s. $A(20) = \frac{1500}{(40+15)^2} = \frac{1500}{3025} = 0{,}4958$ m/s^2.

e) $V = \underset{t\to+\infty}{Lím}\frac{100t}{2t+15} = \underset{t\to+\infty}{Lím}\left(\frac{100}{2+\frac{15}{t}}\right) = 50\ \mathrm{m/s}$.

Significa que a medida que el tiempo crece ilimitadamente, la velocidad aumenta y tiende hasta 50 m/s, como máximo. (Ver Figura 3.2).

f) $A = \underset{t\to+\infty}{Lím}\left(\frac{1500}{(2t+15)^2}\right) = 0\ \mathrm{m/s^2}$.

Lo cual denota que en tanto el tiempo crece ilimitadamente, la aceleración disminuye y tiende a cero. (Ver Figura 3.3.).

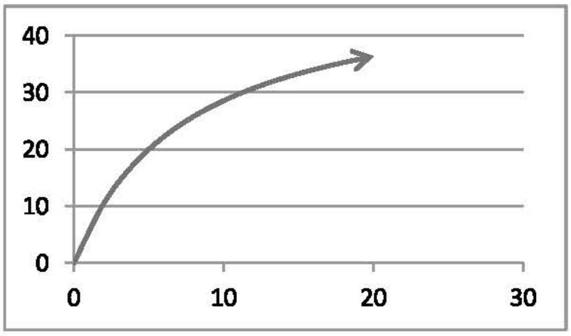

Figura 3.2

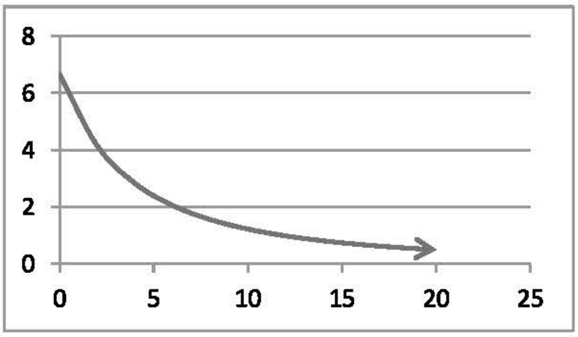

Figura 3.3

LA DERIVADA COMO **RAZÓN** DE CAMBIO INSTANTÁNEO.

Generalmente involucra problemas en donde hay hechos o sucesos que cambian conforme pasa el tiempo.

Para un suceso descrito por la función real $y = f(x)$, sean los instantes x_0 y $x_1 = x_0 + h$, entonces se tiene lo siguiente:

a) La razón de cambio promedio (RCP) del suceso descrito por la función $y = f(x)$, entre los instantes x_0 y x_1 es dada por $RCP = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

b) La razón de cambio instantáneo (RCI) del suceso descrito por la función $y = f(x)$, en cualquier instante x es dada por la derivada de f, así: $RCI = f'(x)$

c) La razón de cambio instantáneo (RCI) del suceso descrito por la función $y = f(x)$, en el instante fijo x_0 es dada por la derivada de f evaluada en el punto x_0, así: $RCI = f'(x_0)$

Ejemplo 1. Se mide durante dos horas la concentración de medicamento en la sangre de un paciente, para lo cual se efectúa medidas cada 10 minutos. Las concentraciones son presentadas en la siguiente tabla:

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
$C(t)$	0	2	17	37	55	73	89	103	111	113	113	103	68

Donde t es el tiempo en minutos y C es la concentración en miligramos por minuto. Hallar la razón de cambio media de la concentración entre los instantes dados:

a) $t_1 = 10$ y $t_2 = 20$ b) $t_1 = 40$ y $t_2 = 50$

c) $t_1 = 60$ y $t_2 = 70$ d) $t_1 = 110$ y $t_2 = 120$

Solución.

Calculemos la razón de cambio promedio para cada caso que se pide:

a) Para $t_1 = 10$ y $t_2 = 20$ $\Rightarrow$ $RCP = \frac{C(t_2)-C(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{17-2}{20-10} = 1{,}5$ mg/m.

b) Para $t_1 = 40$ y $t_2 = 50$ $\Rightarrow$ $RCP = \frac{C(t_2)-C(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{73-55}{50-40} = 1{,}8$ mg/m.

c) Para $t_1 = 60$ y $t_2 = 70$ $\Rightarrow$ $RCP = \frac{C(t_2)-C(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{103-89}{70-60} = 1{,}4$ mg/m.

d) Para $t_1 = 110$ y $t_2 = 120$ $\Rightarrow$ $RCP = \frac{C(t_2)-C(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{68-103}{120-110} = -3{,}5$ mg/m.

En los tres primeros resultados observamos que la concentración de medicamento está aumentando (signo $+$); mientras que en el cuarto resultado la concentración disminuye (signo –).

Ejemplo 2. Un modelo que relaciona aproximadamente el peso de una persona promedio con su altura es $W(t) = 0{,}0005t^3$, donde W es el peso en libras y "t" es la altura en pulgadas.

a) Calcular la razón de cambio promedio del peso W para un cambio de altura de $t_1 = 60$ y $t_2 = 70$ pulgadas.

b) Calcular la razón de cambio instantáneo del peso W con respecto a la altura "t" en $t_0 = 60$ pulgadas.

Solución.

a) Si $t_1 = 60$ pulgadas, entonces $W(t_1) = 0{,}0005(60)^3 = 108$ libras; significa que una persona con 60 pulgadas de talla va a tener un peso de 108 libras.

Si $t_2 = 70$ pulgadas, entonces $W(t_2) = 0{,}0005(70)^3 = 171{,}5$ libras, lo cual implica que una persona con 70 pulgadas de talla va a tener un peso de 171,5 libras.

Entonces la razón de cambio promedio es $RCP = \frac{W(t_2)-W(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{171{,}5-108}{70-60} = 6{,}35$ libras/pulgada. (Ver Figura 3.4).

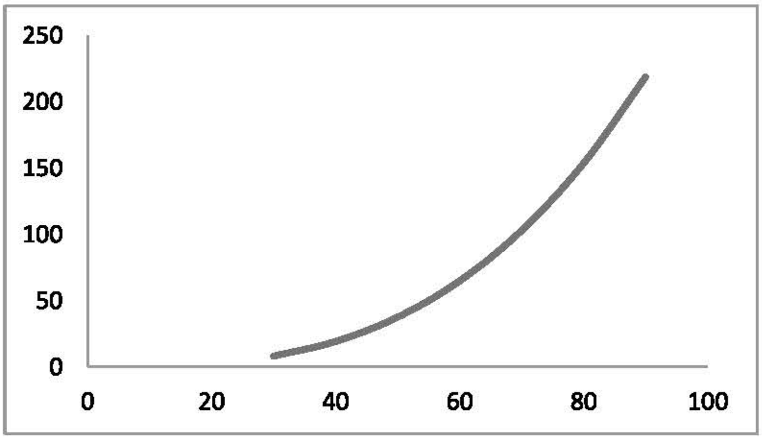

Figura 3.4

b) Con el objetivo de calcular la razón de cambio instantáneo del peso W, necesitamos la derivada de la función W: $W'(t) = 0{,}0015\, t^2$.

Por tanto, la razón de cambio instantáneo para una talla de 60 pulgadas será dada por $W'(60) = 0{,}0015\,(60)^2 = 5{,}4$ libras/pulgada.

Esto implica que si una persona con una talla de 60 pulgadas aumenta su medida en una unidad, entonces su peso se incrementará en 5,4 libras por pulgada. (Ver Figura 3.5).

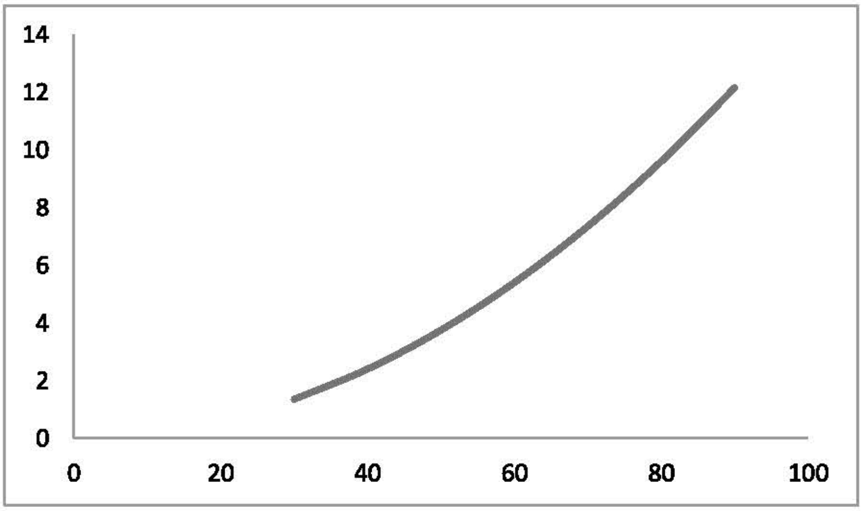

Figura 3.5

Ejemplo 3. Un centro de idiomas encontró que una persona promedio aprende N frases en t horas continuas, calculadas aproximadamente con la fórmula $N(t) = 14t - t^2,\ 0 \le t \le 7$.

Calcular $N(t)$ y la rapidez $\frac{dN}{dt}$ de aprendizaje en $t = 1$; 2; 3; 4; 5 y 6 horas de aprendizaje. Interprete.

Solución.

Calculamos la derivada de N que representa la rapidez de aprendizaje para cualquier tiempo $0 \leq t \leq 7$: $\qquad N'(t) = 14 - 2t$.

Calculamos la rapidez de aprendizaje en los tiempos pedidos:

Si $t = 1$, la persona aprende $N(1) = 13$ frases en una hora con una rapidez de $N'(1) = 12$ palabras por hora.

Si $t = 2$, la persona aprende $N(2) = 24$ frases en dos horas con una rapidez de $N'(2) = 10$ palabras por hora.

Si $t = 3$, la persona aprende $N(3) = 33$ frases en tres horas con una rapidez de $N'(3) = 8$ palabras por hora.

Si $t = 4$, la persona aprende $N(4) = 40$ frases en cuatro horas con una rapidez de $N'(4) = 6$ palabras por hora.

Si $t = 5$, la persona aprende $N(5) = 45$ frases en cinco horas con una rapidez de $N'(5) = 4$ palabras por hora.

Si $t = 6$, la persona aprende $N(6) = 48$ frases en seis horas con una rapidez de $N'(6) = 2$ palabras por hora.

Dando significado al último resultado: *A la sexta hora de aprendizaje la persona aprende 48 frases con una velocidad de 2 frases por hora*, se observa que a medida que el número de horas aumenta, la cantidad de frases aprendidas también se incrementa; sin embargo, disminuye con respecto al tiempo t y la rapidez decae conforme pasa el tiempo.

En la Figura 3.6, se muestra la gráfica del número de frases aprendidas $N(t)$ según el tiempo en horas.

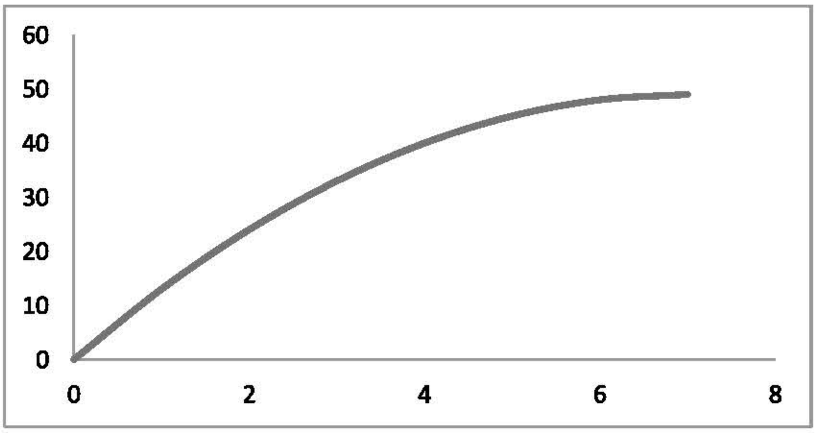

Figura 3.6

Por otro lado, en la Figura 3.7 se muestra la gráfica de la velocidad del número de frases $N'(t)$ según el tiempo en horas.

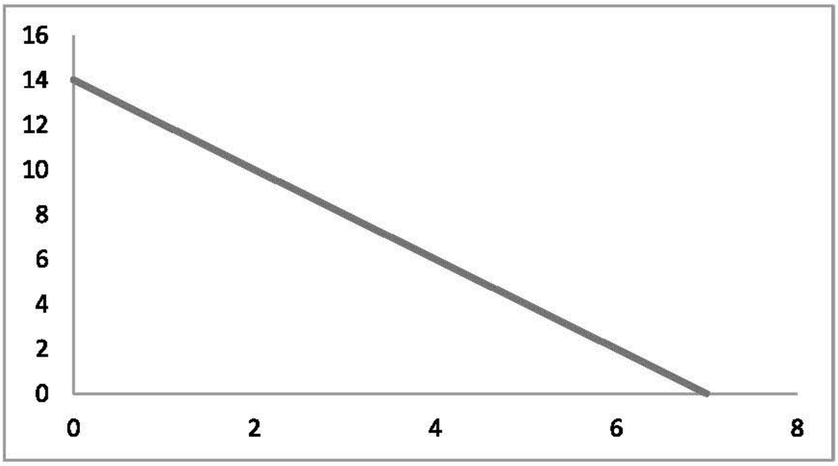

Figura 3.7

3.3. PENDIENTE. RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA CURVA

PENDIENTE Y RECTA TANGENTE A LA GRÁFICA DE UNA **FUNCIÓN**. RECTA NORMAL.

Se trata de una aplicación geométrica que consiste en determinar la recta tangente a la gráfica de una curva suave, representada por una función $f: I \subset R \to R$ en cualquier punto x_0 de ella. Esta se determina usando el concepto de derivada de una función real.

DEFINICIÓN 1. La pendiente de la gráfica de una función $y = f(x)$ en el punto x_0 es dada por la derivada de la función f estimada en ese valor x_0. Denotando por m a la pendiente se tendrá que $m = f'(x_0)$.

La pendiente de la recta normal correspondiente al mismo punto x_0 es dada por la inversa negativa de la pendiente de la recta tangente, es decir, $M = -\frac{1}{m}$

DEFINICIÓN 2. La ecuación de *la recta tangente* a la gráfica de una función $y = f(x)$ en el punto $(x_0; y_0)$ con $y_0 = f(x_0)$ es dada por:

$$L_T: y - y_0 = m(x - x_0)$$

DEFINICIÓN 3. La ecuación de *la recta normal* a la gráfica de una función $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0) con $y_0 = f(x_0)$ es dada por

$$L_N: y - y_0 = M(x - x_0)$$

OBSERVACIÓN. Este hecho adquiere relevancia, por ejemplo, en el cálculo de curvas ortogonales, debido a que la recta tangente y la recta normal son asimismo ortogonales.

Ejemplo. Hallar la pendiente de la recta tangente, así como la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + 1$ en el punto $x_0 = 1$. Determinar también la pendiente de la recta normal y la ecuación de la recta normal en el mismo punto. Realizar las tres gráficas.

Solución. Siendo $x_0 = 1$, entonces $y_0 = 2$.

La derivada de $f(x) = x^2 + 1$ es $f'(x) = 2x$

La pendiente de la recta tangente es $m = f'(x_0) = f'(1) = 2$

La ecuación de *la recta tangente* obtenida usando $L_T: y - y_0 = m(x - x_0)$ es $L_T: y = 2x$

La pendiente de la recta normal es $M = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{2}$

La ecuación de *la recta norma* obtenida usando $L_N: y - y_0 = M(x - x_0)$ es $L_N: y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

La gráfica de la función, de la recta tangente y de la recta normal se muestra en la Figura 3.8.

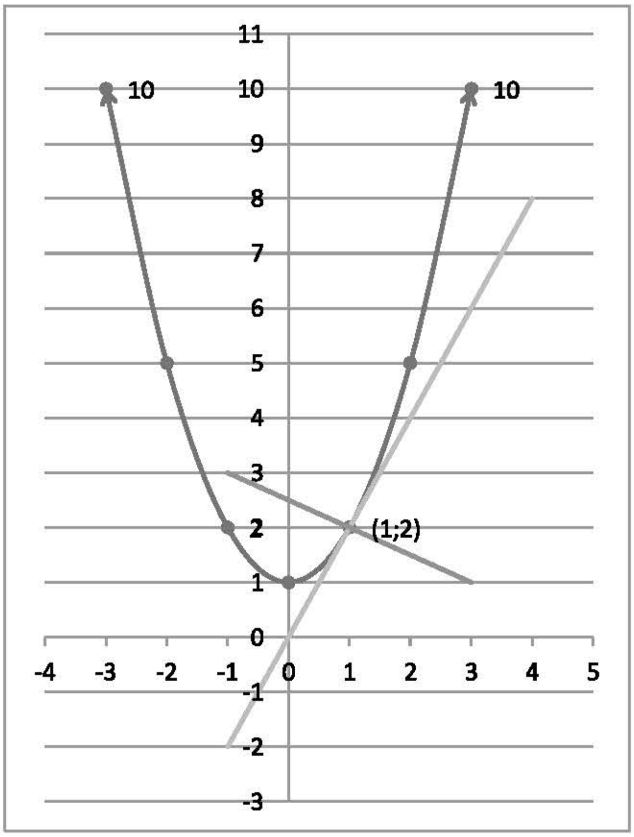

Figura 3.8

3.4. REGLAS DE DERIVACIÓN. OBTENCIÓN DE REGLAS USANDO LA DEFINICIÓN DE DERIVADA

OBSERVACIÓN. En adelante se obtendrán propiedades para calcular en forma directa la derivada de una función real, sin tener que recurrir a la definición dada mediante el límite.

Cada regla puede obtenerse a partir de la definición de derivada de una función real usando cálculos adecuados.

OBTENCIÓN DE ALGUNAS REGLAS DE DERIVACIÓN USANDO LA DEFINICIÓN DE DERIVADA.

Ejemplo 1. Hallar la derivada de la *función constante* $f(x) = C$.

Aplicamos la definición $f'(x) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{C-C}{h} = \underset{h\to 0}{Lím}(0) = 0.$

Por tanto, $f'(x) = 0$

Ejemplo 2. Hallar la derivada de la *función identidad* $f(x) = x$.

Aplicamos la definición $f'(x) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{x+h-x}{h} = \underset{h\to 0}{Lím}\, 1 = 1.$

Por tanto, $f'(x) = 1$

Ejemplo 3. Hallar la derivada de la *función cúbica* $f(x) = x^3$.

Aplicamos la definición $f'(x) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

$= \underset{h\to 0}{Lím} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$

$= \underset{h\to 0}{Lím}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2.$

Por tanto, $f'(x) = 3x^2$

Ejemplo 4. Hallar la derivada de la *suma de funciones* $(f+g)(x)$.

Aplicamos la definición $(f+g)'(x) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}$

$= \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h} = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}$

$= \underset{h\to 0}{Lím}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \underset{h\to 0}{Lím} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x) + g'(x)$

Por tanto, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Ejemplo 5. Hallar la derivada del *producto de dos funciones* $(f \cdot g)(x)$.

Aplicamos la definición $(f \cdot g)'(x) = \underset{h\to 0}{Lím} \frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)[f(x+h).f(x)] + f(x)[g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} g(x+h)\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \left(\lim_{h\to 0} f(x)\right) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Por tanto, $(f \cdot g)'(x) = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Ejemplo 6. Hallar la derivada de la *función exponencial* $f(x) = e^{ax}$.

Aplicamos la definición $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{a(x+h)} - e^{ax}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{ax}e^{ah} - e^{ax}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{ax}(e^{ah}-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{ah}-1}{h}$$

Cambio de variable: Sea $e^{ah} - 1 = t$ entonces $e^{ah} = t + 1$, además si $h \to 0 \Rightarrow t \to 0$.

Aplicamos Ln para despejar h:

$$Ln\left(e^{ah}\right) = Ln\,(t+1) \quad \rightarrow \quad ah(Ln\, e) = Ln\,(t+1) \quad \rightarrow \quad h = \frac{1}{a} Ln\,(t+1)$$

En el límite $\lim_{h\to 0} \frac{e^{ah}-1}{h} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{1}{a}Ln(t+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{a}{\frac{Ln(t+1)}{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{a}{Ln(t+1)^{1/t}} = \frac{a}{Ln\left[\lim_{t\to 0}(t+1)^{1/t}\right]} = \frac{a}{Ln\, e} = a.$

Por tanto, $f'(x) = e^{ax} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{e^{ah}-1}{h} = e^{ah}(a) = a \cdot e^{ax}$

REGLAS DE DERIVACIÓN.

Los anteriores límites pueden formalizarse como reglas para calcular las derivadas de una función, puesto que cada límite abarca una serie de casos especificados por la forma como se exprese.

Todas las reglas de derivación pueden obtenerse a partir de la definición de derivada, tal como se ha mostrado en ejemplos anteriores; no obstante, algunas reglas requieren de algunos artificios adecuados.

Veamos una serie de reglas de derivación que permiten el cálculo de la derivada de las funciones reales, de manera inmediata. Ya se presentarán ejemplos más adelante.

a) Reglas básicas de derivación.

FUNCIÓN	SU DERIVADA
$f(x) = C$, C=Const.	$f'(x) = 0$

$f(x) = x^n , n \in R$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = C\, g(x)$, C=Const.	$f'(x) = C\, g'(x)$
$f(x) = g(x) + h(x)$	$f'(x) = g'(x) + h'(x)$
$f(x) = g(x) - h(x)$	$f'(x) = g'(x) - h'(x)$
$f(x) = g(x) \cdot h(x)$	$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
$f(x) = g(x) \cdot h(x) \cdot k(x)$	$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) \cdot k(x) + g(x) \cdot h'(x) \cdot k(x) + g(x) \cdot h(x) \cdot k'(x)$
$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$	$h'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$
$f(x) = [g(x)]^n$	$f'(x) = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$
$f(x) = g[h(x)]$	$f'(x) = g'[h(x)] \cdot h'(x)$

b) Derivada de las funciones exponenciales y logarítmicas.

FUNCIÓN	SU DERIVADA
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = e^{g(x)}$	$f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x) = a^x$	$f(x) = Ln(a) \cdot a^x$
$f(x) = a^{g(x)}$	$f'(x) = Ln(a) \cdot a^{g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x) = Ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = Ln[g(x)]$	$f'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x)$
$f(x) = Log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot Log_a(e)$
$f(x) = Log_a[g(x)]$	$h'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot Log_a(e) \cdot g'(x)$

c) Derivada de las funciones trigonométricas.

FUNCIÓN	SU DERIVADA
$f(x) = Sen(x)$	$f'(x) = Cos(x)$

$f(x) = Sen[g(x)]$	$f'(x) = Cos[g(x)]{\cdot}g'(x)$
$f(x) = Cos(x)$	$f'(x) = -Sen(x)$
$f(x) = Cos[g(x)]$	$f'(x) = -Sen[g(x)]{\cdot}g'(x)$
$f(x) = Tan(x)$	$f'(x) = Sec^2(x)$
$f(x) = Tan[g(x)]$	$f'(x) = Sec^2[g(x)]{\cdot}g'(x)$
$f(x) = Cot(x)$	$f'(x) = -Csc(x)$
$f(x) = Cot[g(x)]$	$f'(x) = -Csc[g(x)]{\cdot}g'(x)$
$f(x) = Sec(x)$	$f'(x) = Sec(x) \cdot Tan(x)$
$f(x) = Sec[g(x)]$	$f'(x) = Sec[g(x)]{\cdot}Tan[g(x)]{\cdot}g'(x)$
$f(x) = Csc(x)$	$f'(x) = -Csc(x) \cdot Cot(x)$
$f(x) = Csc[g(x)]$	$f'(x) = -Csc[g(x)]{\cdot}Cot[g(x)]{\cdot}g'(x)$

d) Derivada de las funciones hiperbólicas.

FUNCIÓN	SU DERIVADA
$f(x) = Senh(x)$	$f'(x) = Cosh(x)$
$f(x) = Senh[g(x)]$	$f'(x) = Cosh[g(x)] \cdot g'(x)$
$f(x) = Cosh(x)$	$f(x) = Senh(x)$
$f(x) = Cosh[g(x)]$	$f'(x) = Senh[g(x)] \cdot g'(x)$
$f(x) = Tanh(x)$	$f'(x) = Sech^2(x)$
$f(x) = Tanh[fgx)]$	$f'(x) = Sech^2[g(x)] \cdot g'(x)$

$f(x) = Coth(\text{x})$	$f'(x) = -Csch(x)$
$f(x) = Coth[g(x)]$	$f'(x) = -Csch[g(x)] \cdot g'(x)$
$f(x) = Sech(x)$	$f'(x) = -Sech(x) \cdot Tanh(x)$
$f(x) = Sech[g(x)]$	$f'(x) = -Sech[g(x)] \cdot Tanh[g(x)] \cdot g'(x)$
$f(x) = Csch(x)$	$f'(x) = -Csch(x) \cdot Coth(x)$
$f(x) = Csch[g(x)]$	$f'(x) = -Csch[g(x)] \cdot Coth[g(x)] \cdot g'(x)$

3.5. CÁLCULO DE LA DERIVADA DE DIVERSAS FUNCIONES REALES

Ejemplo 1. Véase la derivada de las siguientes funciones:

Función	Su derivada
a) $f(x) = 3x^2 - 2x^{-2} + x$	$f'(x) = 6x + 4x^{-3} + 1$
b) $g(x) = x^{3/2} + x^{1/3}$	$g'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{1}{3}x^{-2/3}$
c) $h(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{\sqrt{x}} = 3x^{-2} - 4x^{-1/2}$	$h'(x) = -6x^{-3} + 2x^{-3/2}$
d) $f(x) = Sen\, x - 4x$	$f'(x) = Cosx - 4$
e) $f(x) = x^2 - Ln(x)$	$f'(x) = 2x - \frac{1}{x}$
f) $g(x) = e^x + x^3 - 2^x$	$g'(x) = e^x + 3x^2 - Ln(2)2^x$
g) $g(x) = x^{-1} + x^{3/2} - \text{Tan}\,(x)$	$g'(x) = -x^{-2} + \frac{3}{2}x^{1/2} - Sec^2 x$

Ejemplo 2. Véase la derivada de las siguientes funciones. Productos:

a) $f(x) = x^2 Ln(x)$

$$f'(x) = [x^2]' Ln(x) + x^2[Ln(x)]' = 2xLn(x) + x^2\frac{1}{x} \quad \Rightarrow f'(x) = 2xLn(x) + x$$

b) $f(x) = e^x Ln(x)$

$f'(x) = [e^x]'Ln(x) + e^x[Ln(x)]' = e^x Ln(x) + e^x \frac{1}{x} \quad \Rightarrow f'(x) = e^x Ln(x) + \frac{e^x}{x}$

c) $f(x) = e^x Sen(x)$

$f'(x) = [e^x]'Sen(x) + e^x[Sen(x)]' = e^x Sen(x) + e^x Cos(x) \Rightarrow f'(x) = e^x[Sen(x) + Cos(x)]$

d) $f(x) = x^3 Tan(x)$

$f'(x) = [x^3]'Tan(x) + x^3[Tan(x)]' = 3x^2 Tan(x) + x^3 Sec^2 x$

$\Rightarrow f'(x) = x^2[3Tan(x) + xSec^2(x)]$

e) $f(x) = x^3 e^x$

$f'(x) = [x^3]'e^x + x^3[e^x]' = 3x^2 e^x + x^3 e^x \quad \Rightarrow f'(x) = x^2 e^x(3 + x)$

f) $f(x) = (x^2 - 3x)e^x$

$f'(x) = [x^2 - 3x]'e^x + (x^2 - 3x)[e^x]' = (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x)e^x \Rightarrow f'(x) = e^x(x^2 - x - 3)$

Ejemplo 3. Véase la derivada de las siguientes funciones. Cocientes:

a) $f(x) = \frac{3x-7}{x+3}$

$f'(x) = \frac{(x+3)[3x-7]' - (3x-7)[x+3]'}{(x+3)^2} = \frac{(x+3)(3) - (3x-7)(1)}{(x+3)^2} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{16}{(x+3)^2}$

b) $f(x) = \frac{x^2+5}{2x-4}$

$f'(x) = \frac{(2x-4)[x^2+5]' - (x^2+5)[2x-4]'}{(2x-4)^2} = \frac{(2x-4)(2x) - (x^2+5)(2)}{(2x-4)^2} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{2x^2-8x-10}{(2x-4)^2}$

c) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{(x^2+1)[x^2+x+1]' - (x^2+x+1)[x^2+1]'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)(2x+1) - (x^2+x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} \quad \Rightarrow f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

d) $f(x)=\frac{x^2+Sen(x)}{x^2-2x}$

$$f'(x)=\frac{(x^2-2x)[x^2+Sen(x)]'-(x^2+Sen(x))[x^2-2x]'}{(x^2-2x)^2}=\frac{(x^2-2x)[2x+Cos(x)]-[x^2+Sen(x)](2x-2)}{(x^2-2x)^2}$$

$$=\frac{-2x^2+xCox(x)[x-2]-2Sen(x)[x-1]}{(x^2-2x)^2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x)=\frac{-2x^2+x(x-2)Cox(x)-2(x-1)Sen(x)}{(x^2-2x)^2}$$

Ejemplo 4. Véase la derivada de las siguientes funciones. Funciones con exponente:

a) $f(x)=(2x-5)^4$

$f'(x)=4(2x-5)^3[2x-5]'=4(2x-5)^3(2) \qquad \Rightarrow f'(x)=8(2x-5)^3$

b) $f(x)=(x^2-3)^{-2}$

$f'(x)=-2(x^2-3)^{-3}[x^2-3]'=-2(x^2-3)^{-3}(2x) \qquad \Rightarrow f'(x)=-4x(2x-3)^{-3}$

c) $f(x)=\sqrt{2-3x}=(2-3x)^{1/2}$

$f'(x)=\frac{1}{2}(2-3x)^{-1/2}[2-3x]'=\frac{1}{2}(2-3x)^{-1/2}(-3)=\frac{-3}{2(2-3x)^{1/2}} \qquad \Rightarrow f'(x)=\frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}$

d) $f(x)=(e^x-x^2)^{3/2}$

$f'(x)=\frac{3}{2}(e^x-x^2)^{1/2}[e^x-x^2]'=\frac{3}{2}(e^x-x^2)^{1/2}(e^x-2x) \quad \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}(e^x-2x)\sqrt{e^x-x^2}$

e) $f(x)=Cos^3x=[Cos\,x]^3$

$f'(x)=3Cos^2x[Cos\,x]' =3Cos^2x\,(-Sen\,x) \qquad \Rightarrow f'(x)=-3Sen(x)Cos^2x$

g) $f(x)=Ln^4x=[Ln\,x]^4$

$f'(x)=4\,Ln^3x[Ln\,x]' =4\,Ln^3x\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \Rightarrow f'(x)=\frac{4}{x}Ln^3x$

Ejemplo 5. Véase la derivada de las siguientes funciones. Casos diversos:

a) $f(x) = xSenh(x)$

$f'(x) = [x]'Senh(x) + x[Senh(x)]' = Senh(x) + xCosh(x) \quad \Rightarrow f'(x) = Senh(x) + xCosh(x)$

b) $f(x) = ArcSen(3x)$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}[3x]' = \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}} \qquad \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$

c) $f(x) = ArcTan(x^2)$

$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2)^2}[x^2]' = \frac{2x}{1+x^4} \qquad \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$

d) $f(x) = 3^{1-x^2}$

$f'(x) = Ln(3) \cdot 3^{1-x^2}[1-x^2]' = Ln(3) \cdot 3^{1-x^2}(-2x) \qquad \Rightarrow f'(x) = -Ln(3) \cdot (2x) \cdot 3^{1-x^2}$

d) $f(x) = (Sen\, x)^{1+x^2}$

$f'(x) = (1+x^2)(Sen\, x)^{(1+x^2-1)}[Sen\, x]' + (Sen\, x)^{1+x^2}Ln(Sen\, x)[1+x^2]'$

$f'(x) = (1+x^2)(Sen\, x)^{x^2}Cos(x) + (Sen\, x)^{1+x^2}Ln(Sen\, x)(2x)$

$\Rightarrow f'(x) = (1+x^2)(Sen\, x)^{x^2}Cos(x) + 2x(Sen\, x)^{1+x^2}Ln(Sen\, x)$

Ejemplo 6. (Problema sobre Contaminación) Un pequeño lago de un campo vacacional llegó a contaminarse con bacterias patógenas debido a la filtración excesiva de la fosa séptica. Después de tratar el lago con un bactericida, el departamento de salud pública estimó que la concentración de bacterias (número por cm³) después de "t" días se calcula mediante la función $C(t) = 500(8-t)^2$, $0 \leq t \leq 7$.

a) Calcular $C'(t)$ usando regla general de potencias.

b) Calcular $C(1)$ con $C'(1)$; $C(3)$ con $C'(3)$ y $C(6)$ con $C'(6)$.

Solución.

a) La variación de la concentración de bacterias es dada por la derivada de la función de concentración $C(t)$: $C'(t) = 1000\,(t-8)$

b) Calculamos lo que se pide:

$C(1) = 24500$ y $C'(1) = -7000$: Se entiende que al finalizar el 1er. día de tratamiento hay 24 500 bacterias, las cuales están disminuyendo cada día a una velocidad de 7 000 bacterias por cm³.

$C(3) = 12\,500$ y $C'(3) = -5000$: Significa que al finalizar el 3er. día de tratamiento hay 12 500 bacterias, las que están disminuyendo cada día a una velocidad de 5 000 bacterias por cm³.

$C(6) = 2\,000$ y $C'(6) = -2\,000$: Quiere decir que al finalizar el 6to. día de tratamiento hay 2 000 bacterias y están disminuyendo cada día a una velocidad de 2 000 bacterias por cm³.

Nota. Se deduce que conforme transcurre el tiempo, la eliminación de bacterias por día decrece, así también lo hace su velocidad.

En la Figura 3.9, se muestra la gráfica de $C(x)$.

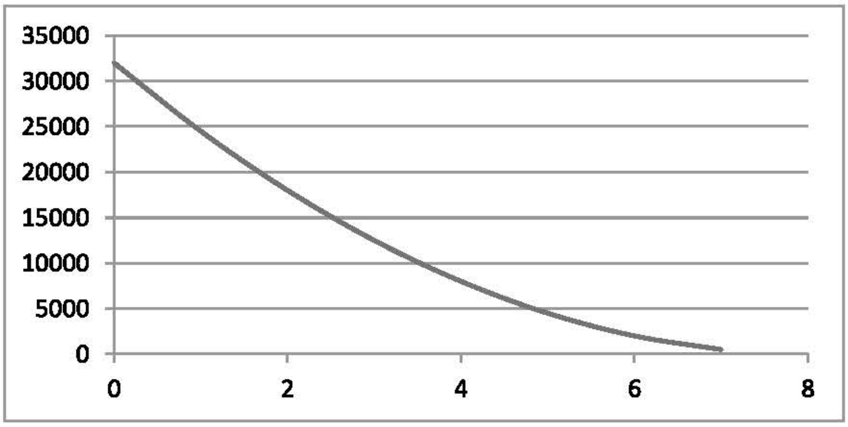

Figura 3.9

Por otro lado, la gráfica de $C'(x)$ aparece en la Figura 3.10.

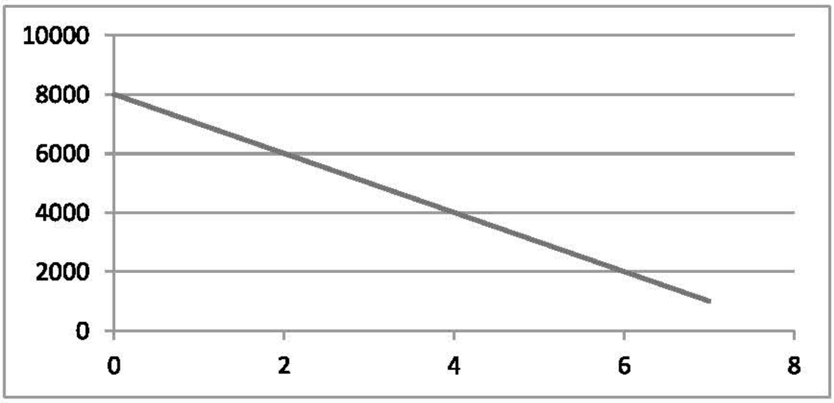

Figura 3.10

3.6. LA REGLA DE LA CADENA O DERIVADA DE FUNCIONES COMPUESTAS

La regla de la cadena para calcular la derivada de las funciones compuestas se establece según las composiciones que se formen:

a) Si $f(x) = (u\ o\ v)(x) = u[v(x)]$, la derivada es $f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x)$

b) Si $f(x) = (u\ o\ v\ o\ w)(x) = u\{v[w(x)]\}$, la derivada $f'(x) = u'\{v[w(x)]\} \cdot v'[w(x)] \cdot w'(x)$

c) Sucesivamente se puede tener más composiciones de funciones con su respectiva derivada.

Ejemplo 1. Se tiene la derivada de la composición de dos funciones donde se aplicará la regla $f'(x) = u'[v(x)] \cdot v'(x)$.

a) $f(x) = Sen(2x - 3)$

Su derivada es $f'(x) = Cos(2x - 3)[2x - 3]' = Cos(2x - 3)(2)$ $\Rightarrow f'(x) = 2Cos(2x - 3)$

b) $f(x) = Cos(x^2 - 1)$

Su derivada es $f'(x) = -Sen(x^2 - 1)[x^2 - 1]' = -Sen(x^2 - 1)(2x)$

$\Rightarrow f'(x) = -2xSen(x^2 - 1)$

c) $f(x) = e^{x^2+4x-1}$

Su derivada es $f'(x) = e^{x^2+4x-1}[x^2 + 4x - 1]' = e^{x^2+4x-1}(2x + 4)$

$\Rightarrow f'(x) = (2x + 4)e^{x^2+4x-1}$

d) $f(x) = Ln(27 - x^3)$

Su derivada es $f'(x) = \frac{1}{27-x^3}[27 - x^3]' = \frac{-3x^2}{27-x^3}$ $\Rightarrow f'(x) = \frac{-3x^2}{27-x^3}$

e) $f(x) = Sen(1 - x^2)$

Su derivada resulta $f'(x) = Cos(1 - x^2) \cdot (1 - x^2)' = Cos(1 - x^2)(-2x) = -2xCos(1 - x^2)$

$\Rightarrow f'(x) = -2xCos(1 - x^2)$

f) $f(x) = Ln(3x^2 - 6x)$

Su derivada resulta $f'(x) = \frac{1}{3x^2-6x}(3x^2 - 6x)' = \frac{6x-6}{3x^2-6x} = \frac{2x-2}{x^2-2x}$ $\Rightarrow f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x}$

g) $f(x) = e^{1-4x}$

Su derivada es $f'(x) = e^{1-4x}(1-4x)' = e^{1-4x}(-4) = -4e^{1-4x} \quad \Rightarrow f'(x) = -4e^{1-4x}$

h) $f(x) = Sen\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$

Es su derivada: $f'(x) = Cos\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)' = Cos\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)\cdot\frac{(x-1)(x^2+1)'-(x^2+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$= Cos\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)\cdot\frac{(x-1)(2x)-(x^2+1)(1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}Cos\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}Cos\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)$

i) $g(t) = \sqrt{8-5t} = (8-5t)^{1/2}$

Su derivada es $g'(t) = \frac{1}{2}(8-5t)^{-\frac{1}{2}}(-5) = -\frac{5}{2}(8-5t)^{-1/2} \;\Rightarrow\; g'(t) = -\frac{5}{2}(8-5t)^{-1/2}$

j) $f(x) = Sen(3-2x) + Tan(x^2)$

Es su derivada: $f'(x) = -2Cos(3-2x) + 2x\,Sec^2(x^2)$

k) $g(x) = ln(7x) - 3e^{7x} + 2^x$

Su derivada es: $\quad g'(x) = \frac{1}{x} - 3e^{7x}(7) + (Ln\,2)\,2^x = \frac{1}{x} - 21e^{7x} + (Ln\,2)\,2^x$

l) $h(x) = Sen(3x)\cdot Sec(x^2)$

La derivada resulta $\quad h'(x) = [Sen(3x)]'\cdot\left(Sec(x^2)\right) + Sen(x)\cdot[Sec(x^2)]'$

$= Cos(3x)[3x]'\cdot(Sec(x^2)) + Sen(3x).[Sec(x^2)\cdot Tan(x^2)]\cdot[x^2]'$

$= Cos(3x)(3)\cdot(Sec(x^2)) + Sen(3x).[Sec(x^2)\cdot Tan(x^2)]\cdot(2x)$

$\Rightarrow f'(x) = 3Cos(3x)\cdot\left(Sec(x^2)\right) + 2x\cdot Sen(3x)\cdot Sec(x^2)\cdot Tan(x^2)$

m) $f(x) = Cosh(x - x^2)$

Su derivada es $\; h'(x) = Senh(x-x^2)[x-x^2]' = Senh(x-x^2)(1-2x)$

$\Rightarrow f'(x) = (1-2x)Senh(x-x^2)$

Ejemplo 2. Se muestra la derivada de la composición de tres funciones, donde se aplicará la siguiente regla: $f'(x) = u'\{v[w(x)]\} \cdot v'[w(x)] \cdot w'(x)$.

a) $f(x) = Cos^3(x^2)$

Su derivada es $f'(x) = 3Cos^2(x^2) \cdot [Cos\ (x^2)]' = 3\ Cos^2(x^2)(-Sen\ x^2) \cdot [x^2]'$

$= 3\ Cos^2(x^2)(-Sen\ x^2) \cdot (2x) = -6x\ Cos^2(x^2)\ Sen(x^2)$

b) $f(x) = Ln\left[Sen(\sqrt{x})\right]$

Es la derivada: $f'(x) = \frac{1}{Sen(\sqrt{x})}\left[Sen(\sqrt{x})\right]' = \frac{1}{Sen(\sqrt{x})}\left[Cos(\sqrt{x})\right] \cdot (x^{1/2})'$

$= \frac{1}{Sen(\sqrt{x})}\left[Cos(\sqrt{x})\right] \cdot (\frac{1}{2}x^{-1/2}) = \frac{x^{-1/2}}{2\ Sen(\sqrt{x})}\left[Cos(\sqrt{x})\right]$

c) $f(x) = \sqrt{e^{Sen\ x}} = (e^{Sen\ x})^{1/2}$.

Su derivada es $f'(x) = \frac{1}{2}(e^{Sen\ x})^{-1/2}. [e^{Sen\ x}]' = \frac{1}{2}(e^{Sen\ x})^{-1/2}. (e^{Sen\ x}) \cdot [Sen\ x]'$

$= \frac{1}{2}(e^{Sen\ x})^{-1/2}. (e^{Sen\ x}) Cos\ x = \frac{1}{2}(e^{Sen\ x})^{1/2} Cos\ x$.

d) $f(x) = Sen^2(x^2 - 2x)$

$f'(x) = 2Sen(x^2 - 2x)[Sen(x^2 - 2x)]' = 2Sen(x^2 - 2x)[Cos(x^2 - 2x)][x^2 - 2x]'$

$= 2Sen(x^2 - 2x)[Cos(x^2 - 2x)](2x - 2)$

$\Rightarrow f'(x) = 4(x - 1)Sen(x^2 - 2x)Cos(x^2 - 2x)$

e) $f(x) = Ln^2(x^2 + 3x)$

$f'(x) = 2Ln(x^2 + 3x)[Ln(x^2 + 3x)]' = 2Ln(x^2 + 3x)\frac{1}{x^2+3x}[x^2 + 3x]'$

$= 2Ln(x^2 + 3x)\frac{1}{x^2+3x}(2x + 3)$ $\qquad \Rightarrow f'(x) = \frac{2(2x+3)}{x^2+3x}Ln(x^2 + 3x)$

f) $h(x) = \sqrt{4 + Cos^3(x)} = [4 + Cos^3 x]^{1/2}$

$h'(x) = \frac{1}{2}(4 + Cos^3x)^{-1/2}[4 + Cos^3x]' = \frac{1}{2}(4 + Cos^3x)^{-1/2}(3\ Cos^2x)[Cos\ x]'$

$= \frac{3}{2}(4 + Cos^3x)^{-1/2}(3\ Cos^2x)(-Sen\ x)$ $\quad\Rightarrow f'(x) = -\frac{3Sen\ x \cdot Cos^2x}{2\sqrt{4+Cos^3x}}$

g) $g(x) = e^{\sqrt{1-Sen\ x}}$

$h'(x) = e^{\sqrt{1-Sen\ x}}[(1 - Sen\ x)^{1/2}]' = e^{\sqrt{1-Sen\ x}}\frac{1}{2}[1 - Sen\ x]^{-1/2}[1 - Sen\ x]'$

$= e^{\sqrt{1-Sen\ x}}\frac{1}{2}[1 - Sen\ x]^{-1/2}(-Cos\ x) =-(Cos\ x)e^{\sqrt{1-Sen\ x}} \cdot \frac{1}{2}[1 - Sen\ x]^{-1/2}$

h) $f(x) = Sen^3(x^2 - x) = [Sen(x^2 - x)]^3$

$f'(x) = 3Sen^2(x^2 - x)[Sen(x^2 - x)]' = 3Sen^2(x^2 - x)Cos(x^2 - x)[x^2 - x]'$

$=3Sen^2(x^2 - x)Cos(x^2 - x)(2x - 1)$

$\Rightarrow f'(x) = 3(2x - 1)Sen^2(x^2 - x)Cos(x^2 - x)$

Ejemplo 3. Véase la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2Tan(x^2 + 1)$

$f'(x) = [x^2]'\,\mathrm{Tan}(x^2 + 1) + x^2[Tan(x^2 + 1)]' = 2x\,\mathrm{Tan}(x^2 + 1) + x^2Sec^2(x^2 + 1)[x^2 + 1]'$

$= 2x\,\mathrm{Tan}(x^2 + 1) + x^2Sec^2(x^2 + 1)(2x) = 2x\,\mathrm{Tan}(x^2 + 1) + 2x^3Sec^2(x^2 + 1)$

$\Rightarrow f'(x) = 2x\,\mathrm{Tan}(x^2 + 1) + 2x^3Sec^2(x^2 + 1)$

b) $f(x) = e^{2x}Ln(x^2 + 3)$

$f'(x) = [e^{2x}]'Ln(x^2 + 3) + e^{2x}[Ln(x^2 + 3)]' = e^{2x}[2x]'Ln(x^2 + 3) + e^{2x}\frac{1}{x^2+3}[x^2 + 3]'$

$= e^{2x}(2)Ln(x^2 + 3) + e^{2x}\frac{1}{x^2+3}(2x) = 2e^{2x}\left[Ln(x^2 + 3) + \frac{x}{x^2+3}\right]$

$\Rightarrow f'(x) = 2e^{2x}\left[Ln(x^2 + 3) + \frac{x}{x^2+3}\right]$

c) $f(x) = \frac{Sen(x^2+x)}{2x+5}$

$f'(x) = \frac{(2x+5)[Sen(x^2+x)]' - Sen(x^2+x)[2x+5]'}{(2x+5)^2} = \frac{(2x+5)Cos(x^2+x)[x^2+x]' - Sen(x^2+x)(2)}{(2x+5)^2}$

$= \frac{(2x+5)Cos(x^2+x)(2x+1)-Sen(x^2+x)(2)}{(2x+5)^2} = \frac{(4x^2+12x+5)Cos(x^2+x)-2Sen(x^2+x)}{(2x+5)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{(4x^2+12x+5)Cos(x^2+x)-2Sen(x^2+x)}{(2x+5)^2}.$

d) $f(x) = \frac{Ln(5x)}{2x-3}$

$f'(x) = \frac{(2x-3)[Ln(5x)]'-Ln(5x)[2x-3]'}{(2x-3)^2} = \frac{(2x-3)[Ln(5x)]'}{(2x-3)^2} - \frac{Ln(5x)\cdot(2)}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2x-3}\cdot\frac{1}{x} - \frac{2\,Ln(5x)}{(2x-3)^2}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x(2x-3)} - \frac{2\,Ln(5x)}{(2x-3)^2}$

3.7. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Dada una función real de variable real $y = f(x)$.

Si $y = f(x)$ es diferenciable en $x \in Dom(f)$, entonces su derivada de orden 1 es $y' = f'(x)$

Si $y' = f'(x)$ es diferenciable en $x \in Dom(f')$, entonces su derivada de orden 2 es $y'' = f''(x)$

Si $y'' = f''(x)$ es diferenciable en $x \in Dom(f'')$, entonces su derivada de orden 3 es $y''' = f'''(x)$

Si $y''' = f'''(x)$ es diferenciable en $x \in Dom(f''')$, entonces su derivada de orden 4 es $y^{(4)} = f^{(4)}(x)$

Así sucesivamente se obtiene la derivada de orden n de una función real, la cual es representada por $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$

A partir de la derivada de orden dos, estas se conocen como derivadas de orden superior (superior a uno).

Ejemplo 1. Se muestra a continuación derivadas de distintos órdenes:

a) Derivada de orden 2 de $f(x) = 4 - 5x + x^2$,

La derivada de orden 1 es $f'(x) = -5 + 2x$

La derivada de orden 2 es $f''(x) = 2$

b) Derivada de orden 2 de $f(x) = (x^2 - 7)^3$

La derivada de orden 1 es $f'(x) = 3(x^2-7)^2 \cdot [x^2-7]' = 3(x^2-7)^2(2x) = 6x(x^2-7)^2$

La derivada de orden 2 es $f''(x) = [6x]' \cdot (x^2-7)^2 + (6x) \cdot [(x^2-7)^2]'$

$= 6(x^2-7)^2 + (6x)2(x^2-7)[x^2-7]' = 6(x^2-7)^2 + (6x)2(x^2-7)(2x)$

$\Rightarrow f''(x) = 6(x^2-7)(5x^2-7)$.

c) Derivada de orden 2 de $f(x) = x^3e^x$.

La derivada de orden 1 es $f'(x) = [x^3]' \cdot (e^x) + (x^3) \cdot [e^x]' = 3x^2e^x + x^3e^x = (3x^2+x^3)e^x$

La derivada de orden 2 es $f''(x) = [3x^2+x^3]' \cdot (e^x) + (3x^2+x^3) \cdot [e^x]'$

$= (6x+3x^2)e^x + (3x^2+x^3)e^x = (6x+6x^2+x^3)e^x$

d) Derivada de orden 4 de $f(x) = Ln\, x$

La derivada de orden 1 es $f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

La derivada de orden 2 es $f''(x) = -x^{-2}$

La derivada de orden 3 es $f'''(x) = 2x^{-3}$

La derivada de orden 4 es $f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$

Ejemplo 2. Hallar la derivada hasta el orden que se indica en cada caso.

a) Hallar la derivada de orden 3 de la función $f(x) = 2x^3 - Sen(x)$.

Solución.

Derivada de orden 1: $f'(x) = 6x^2 - Cos(x)$

Derivada de orden 2: $f''(x) = 12x + Sen(x)$

Derivada de orden 3: $f'''(x) = 12 + Cos(x)$.

b) Hallar la derivada de orden 2 de la función $g(x) = x^3\, Lnx$.

Solución. Aplicamos reiteradamente la regla del producto a la función dada:

Derivada de orden 1: $g'(x) = [x^3]'(Lnx) + (x^3)[Ln\, x]' = 3x^2 Ln\, x + (x^3)\frac{1}{x} = 3x^2 Ln\, x + x^2$

Derivada de orden 2: $g''(x) = [3x^2]'(Lnx) + (3x^2)[Ln\,x]' + 2x = 6x\,Ln\,x + (3x^2)\frac{1}{x} + 2x$

$= 6x\,Ln\,x + 3x + 2x = 6x\,Ln\,x + 5x$.

c) Hallar la derivada de orden 4 de la función $h(x) = 16(x - 1)^{1/2}$.

Solución. Aplicamos regla general de potencias, repetidas veces:

Derivada de orden 1: $h'(x) = 8(x-1)^{-1/2}$

Derivada de orden 2: $h''(x) = -4(x-1)^{-3/2}$

Derivada de orden 3: $h'''(x) = 6(x-1)^{-5/2}$

Derivada de orden 4: $h^{(4)}(x) = -15(x-1)^{-7/2}$

d) Hallar la derivada de orden 2 de la función $f(s) = \frac{s}{s^2-1}$

Solución. Aplicamos regla del cociente dos veces:

Derivada de orden 1: $f'(s) = -\frac{(s^2+1)}{(s^2-1)^2}$

Derivada de orden 2: $f''(s) = \frac{2s(s^2+3)}{(s^2-1)^3}$

Ejemplo 3. Halle según se pide:

a) Siendo $y = x^3$, hallar $y'' - 3y' + 2$.

Solución. Se necesita $y' = 3x^2$; $y'' = 6x$.

Entonces, $y'' - 3y' + 2 = 6x - 3(3x^2) + 2 = 2 + 6x - 9x^2$.

b) Siendo $y = e^{-x}$, hallar $xy'' + x^2y' - x^3y$.

Solución. Se necesita $y' = -e^{-x}$; $y'' = e^{-x}$,

Entonces: $xy'' + x^2y' - x^3 = x(e^{-x}) + x^2(-e^{-x}) - x^3(e^{-x}) = xe^{-x}(1 - x - x^2)$

c) Siendo $y = Ln(x)$, hallar $y'' - (y')^2 + 2y$.

Solución. Se necesita $y' = \frac{1}{x}$; $y'' = \frac{-1}{x^2}$, Entonces, $y'' - (y')^2 + 2y = \frac{-1}{x^2} - \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2Ln(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{x^2} + 2Ln(x) = 2Ln(x) - \frac{2}{x^2}$.

Ejemplo 4. El Polinomio de Taylor. Dada la función real de variable $y = f(x)$ que acepta derivada de orden n en una vecindad del punto x_0, se puede encontrar el Polinomio de Taylor con la forma siguiente:

$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(n)}(x)(x-x_0)^n}{n!}$, siendo $f^{(n)}(x)$ la derivada de orden n de la función real $f(x)$.

a) Hallar el polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$ para la función $f(x) = e^x$.

$$f(x) = e^x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$, para todo $x \epsilon R$

b) Hallar el polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$ para la función $f(x) = Ln(1 + x)$.

$$f(x) = Ln\,(1 + x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

$f(x) = Ln\,(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \ldots$, con $-1 < x \leq 1$

c) Hallar el polinomio de Taylor centrado en $x_0 = 0$ para la función $f(x) = Cos(x)$.

$$f(x) = Cos\,x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

$f(x) = Cos(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \ldots$, para todo $x \epsilon R$

3.8. DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Una *función explicita* es la que tiene despejada la variable dependiente $y = f(x)$. Las mismas que hasta ahora se han venido trabajando.

Una *función implícita* es aquella que no tiene despejada la variable dependiente $y = f(x)$, la cual es dada con la forma de una ecuación en las variables x e y. Esta puede expresarse en la forma $F(x; y) = 0$.

Sin embargo, no siempre la ecuación de $F(x; y) = 0$ representa una función implícita de $y = f(x)$.

Por ejemplo, la ecuación $y + 2x - 5 = 0$ representa implícitamente a la función $y = 5 - 2x$. Mientras que la ecuación $x^2 + y^2 - 9 = 0$ representa simultáneamente a las funciones implícitas $y = +\sqrt{9 - x^2}$ y a $y = -\sqrt{9 - x^2}$.

Ejemplo 1. Son funciones explicitas:

a) $f(x) = Sen\,x + Cos\,x$ b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 7x - 1}$ c) $f(x) = x^2 + xe^x$

d) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ e) $y = x^2 + 3x - 6$ f) $y = Ln(7 - x^2)$

Ejemplo 2. En las siguientes ecuaciones se da funciones implícitas representadas a través de la variable "y":

a) $xy + \sqrt{xy} = x^2 + y^2$ b) $x^2 + y^2 = x\,Sen\,(xy)$ c) $x^{1/2} + y^{1/2} = Ln(xy)$

d) $e^{xy} + x + y = xe^y + ye^x$ e) $x\,Sen\,y = Cos\,(xy)$ f) $\sqrt{x^2 + y^2} = xy$

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN IMPLÍCITA.

Para calcular la derivada de una función implícita se puede elegir dos formas:

FORMA 1. Derivando ambos lados de la ecuación $F(x; y) = 0$, tomando en cuenta que y es una función, y haciendo uso de la regla de la cadena.

FORMA 2. Usando la siguiente proposición: si y es proporcionada mediante la ecuación $F(x; y) = 0$, la derivada con respecto a x es dada por $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF(x;y)}{dx}}{\frac{dF(x;y)}{dy}}$.

Ejemplo 1. Derivar implícitamente:

a) Forma 1: $xy = x^2 + y^2$, sabiendo que y depende de x.

Derivamos ambos lados con respecto a x: $\frac{d}{dx}[xy] = \frac{d}{dx}[x^2 + y^2]$

Tenemos: $x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$ o $x\frac{dy}{dx} + y = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$

Despejando $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx}(x - 2y) = 2x - y$

Se tiene la derivada pedida: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-2y}$.

b) Forma 2: $x^2 + y^2 = x\,Sen\,(y)$, sabiendo que y depende de x.

Escribimos la expresión dada en la forma $F(x; y) = 0$: $x^2 + y^2 - x\,Sen\,(y) = 0$

Aplicamos la fórmula $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF(x;y)}{dx}}{\frac{dF(x;y)}{dy}}$ $\rightarrow$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{d}{dx}(x^2+y^2-x\,Sen\,(y))}{\frac{d}{dy}(x^2+y^2-x\,Sen\,(y))}$

De donde, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x-Sen\,y}{2y-xCos\,(y)}$.

Obsérvese que ambas formas conducen a obtener la derivada que se solicita; así también, en un mismo ejercicio, ambas arriban a idéntico resultado.

c) $x^{1/2} + y^{1/2} = Ln(xy)$, sabiendo que y depende de x.

Derivamos ambos lados con respecto a x: $\frac{d}{dx}[x^{1/2}+y^{1/2}] = \frac{d}{dx}Ln(xy)$

Tenemos: $\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}(y + x\frac{dy}{dx})$ o $\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$

o $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\frac{dy}{dx}$

Despejando $\frac{dy}{dx}$: $\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{2}{y}\right) = \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

Se tiene la derivada requerida: $\frac{dy}{dx} = \frac{y(2-\sqrt{x})}{x(\sqrt{y}-2)}$.

Ejemplo 2. Aplicando derivación implícita, resuelva según se solicite.

a) Hallar la derivada de "y" si es dada mediante la ecuación $xy + Sen(y) - 7 = 0$.

Solución.

Derivando ambos lados con respecto a "x" se tiene $x\frac{dy}{dx} + y + Cos(y)\frac{dy}{dx} = 0$.

Despejando $\frac{dy}{dx}$ se consigue finalmente $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x+Cos\,y}$

b) Hallar la derivada de "y" si aparece formando parte de la ecuación $e^{xy} + y\,Cos(x) = \pi$

Solución.

Derivando ambos lados respecto a "x", se tiene $e^{xy}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) - y\,Sen(x) + \frac{dy}{dx}Cos(x) = 0$.

Despejando $\frac{dy}{dx}$ se logra $\frac{dy}{dx} = \frac{y\,Sen\,x - e^{xy}}{xe^{xy}+Cos\,x}$

Ejemplo 3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva C representada por "y", en el punto $(3; 1)$, la cual es dada implícitamente por la ecuación $y^3 + 2xy^2 - 3x - 10 = 0$.

Solución.

Derivando ambos lados respecto a "x", se tiene $3y^2\frac{dy}{dx}+4xy\frac{dy}{dx}+2y^2-3=0$.

Despejando $\frac{dy}{dx}$ se consigue $\frac{dy}{dx}=\frac{3-2y^2}{3y^2+4xy}$

Evaluando $(3;1)$ en $\frac{dy}{dx}$ se tendrá la pendiente $m=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(3;1)}=\frac{3-2(1)^2}{3(1)^2+4(3)(1)}=\frac{1}{15}$

Y la recta tangente quedará expresada por $L_T: y-1=\frac{1}{15}(x-3)$ o $y=\frac{1}{15}x+\frac{4}{5}$

Ejemplo 4. Hallar la segunda derivada de "y" que es dada implícitamente por la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Solución.

Derivando ambos lados respecto a "x", se tiene $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$

Despejando $\frac{dy}{dx}$ se llega a $\frac{dy}{dx}=\frac{-b^2}{a^2}\frac{x}{y}$

Derivando por segunda vez respecto a "x", $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-b^4}{a^2}\frac{1}{y^3}$

Ejemplo 5. (PROBLEMA) Supóngase que una estación de radar está siguiendo el rastro de un objeto volador no identificado (OVNI). Considere que "S" representa la distancia en el tiempo "t" para $t>0$ del OVNI a un punto fijo. Tome en cuenta que "S" satisface la ecuación $S^2+t^2S=t^3+1$. ¿Con cuánta rapidez se está moviendo el objeto en el instante t?

Solución.

Recordemos que S depende de t, $S=S(t)$. Se deriva ambos lados de $S^2+t^2S=t^3+1$ con respecto a t: $\frac{d}{dt}(s^2+t^2S)=\frac{d}{dt}(t^3+1)$

Entonces se tiene $2S\frac{dS}{dt}+t^2\frac{dS}{dt}+2tS=3t^2$

Despejando se llega a la rapidez respecto a t : $\frac{dS}{dt}=\frac{3t^2-2tS}{2S+t}$.

3.9. INCREMENTO Y DIFERENCIAL DE UNA **FUNCIÓN** REAL

INCREMENTO DE UNA **FUNCIÓN** REAL.

Dada una función real para la cual su variable independiente $\boldsymbol{x}$ sufre un incremento de $\boldsymbol{x_0}$ a $\boldsymbol{x_0} + \Delta\boldsymbol{x}$, entonces la función real $\boldsymbol{f}$ sufrirá un incremento de $\boldsymbol{f(x_0)}$ a $\boldsymbol{f(x_0} + \Delta\boldsymbol{x})$.

Nótese que el incremento de una función real es la diferencia exacta de dicho incremento correspondiente al que se alcanza desde $\boldsymbol{x_0}$ hasta $\boldsymbol{x_0} + \Delta\boldsymbol{x}$. (Ver Figura 3.11).

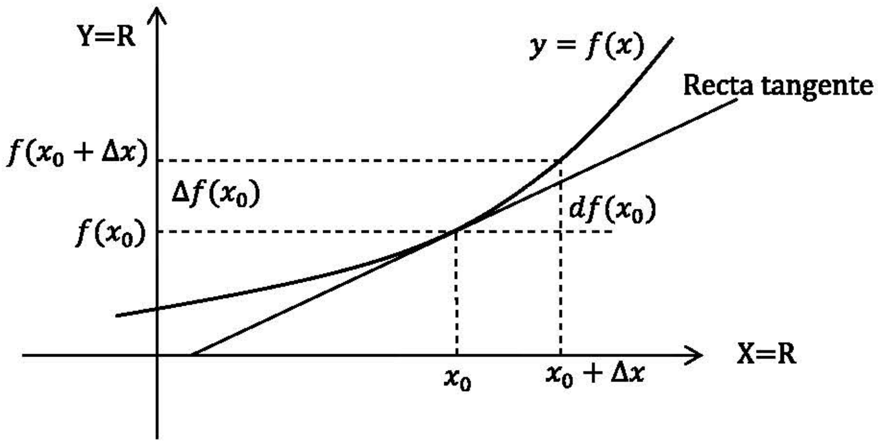

Figura 3.11

DEFINICIÓN. Sea $\boldsymbol{f: I \subset R \to R}$ una función real definida en el intervalo I, sea $\boldsymbol{x_0 \in I}$, entonces el incremento de $\boldsymbol{f}$ hasta $\Delta\boldsymbol{f}$correspondiente al incremento de $\Delta\boldsymbol{x}$ en $\boldsymbol{x_0}$ es dado por:

$$\Delta \boldsymbol{f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$$

Ejemplo 1. (Para ver incremento) Sea la función real $\boldsymbol{f: I \subset R \to R}$ que representa la cantidad de desperdicios que una curtiembre arroja a un río, cuya cantidad se modela por la regla $\boldsymbol{f(x) = 0,2x^2 + 1,8x}$ toneladas a la semana.

a) Determinar el incremento de la función al pasar de la quinta a la sexta semana.

b) Realizar el mismo ejercicio para el tránsito de la décima a la decimoprimera semana.

Solución.

a) Para el punto $\boldsymbol{x_0 = 5}$, el incremento será $\Delta\boldsymbol{x = 1}$.

El incremento se calcula de $\quad \Delta\boldsymbol{f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$

Veamos: $\Delta\boldsymbol{f(5) = f(5+1) - f(5)} \quad = \quad \boldsymbol{f(6) - f(5)} \quad = \boldsymbol{[0,2(6)^2 + 1,8(6)] - [0,2(5)^2 + 1,8(5)] = 18 - 14 = 4}$ toneladas.

Lo cual significa que estando en la quinta semana $\boldsymbol{x_0 = 5}$, al pasar a la próxima, el incremento correspondiente en cuanto a la cantidad de desperdicios arrojados al río es de 4 toneladas.

b) Para el $\boldsymbol{x_0 = 10}$, el incremento será $\Delta\boldsymbol{x = 1}$.

El incremento se calcula de $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Veamos: $\Delta f(10) = f(10+1) - f(10) = f(11) - f(10)$

$=[0,2(11)^2 + 1,8(11)] - [0,2(11)^2 + 1,8(10)] = 44 - 38 = 6$ toneladas.

Esto quiere decir que estando en la décima semana $x_0 = 10$, el incremento correspondiente al pasar a la siguiente semana, en cuanto a la cantidad de desperdicios arrojados al río, es de 6 toneladas.

DIFERENCIAL DE UNA **FUNCIÓN** REAL .

Dada una función real donde su variable independiente x sufre un incremento desde x_0 hasta $x_0 + \Delta x$, entonces la función real f sufrirá un incremento de $f(x_0)$ a $f(x_0 + \Delta x)$, el cual puede ser aproximado por el diferencial de la función en ese punto x_0.

DEFINICIóN . Sea $f: I \subset R \to R$ una función real definida en el intervalo I, sea $x_0 \in I$, entonces el diferencial de f en x, $df(x)$ correspondiente al incremento dx en x_0 es dado por:

$$df(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} \cdot dx$$

Nótese que el diferencial de una función real es la diferencia aproximada de dicho incremento correspondiente al que se da desde x_0 hasta $x_0 + \Delta x$.

Ejemplo 1. (Para ver diferencial) Sea la función real $f: I \subset R \to R$ que representa la cantidad de desperdicios que una curtiembre arroja a un río, cuya cantidad se modela por la regla $f(x) = 0,2x^2 + 1,8x$ toneladas a la semana.

a) Determinar el diferencial de la función al pasar de la quinta a la sexta semana.

b) Realizar el mismo ejercicio para el tránsito de la décima a la decimoprimera semana.

Solución.

Se necesita la derivada de la función $f(x) = 0,2x^2 + 1,8x$; la cual es $\frac{df(x)}{dx} = 0,4x + 1,8$.

a) Para el punto $x_0 = 5$, el diferencial será $dx = 1$.

El diferencial se calcula de $df(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} \cdot dx$

Veamos: $df(5) = \frac{df(5)}{dx} \cdot (1) = [0,4(5) + 1,8](1) = 3,8$ toneladas.

Esto significa que estando en la quinta semana $x_0 = 5$, el diferencial correspondiente en la cantidad de desperdicios arrojados al río es aproximadamente de 3,8 toneladas.

b) Para el punto $x_0 = 10$, el diferencial será $dx = 1$.

El diferencial se calcula de $df(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} \cdot dx$

Veamos: $df(10) = \frac{df(10)}{dx}(1) = [0,4(10) + 1,8](1) = 5,8$ toneladas.

Lo cual denota que estando en la décima semana $x_0 = 10$, al pasar a la siguiente, el diferencial correspondiente en cuanto a la cantidad de desperdicios arrojados al río es de aproximadamente 5,8 toneladas.

Ejemplo 2. Se desea confeccionar un recipiente semiesférico de 25 cm de radio interior.

a) Usando incrementos, hallar la cantidad de material empleado en la confección de dicho recipiente si el espesor debe ser de 0,5 cm.

b) Haciendo uso de diferenciales, aproximar la cantidad de material empleado en la confección de dicho recipiente si el espesor debe ser de 0,5 cm.

c) Comparar ambos resultados.

Solución.

La función para hallar el volumen del recipiente mencionado será $V(r) = \frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{2\pi}{3}r^3$; el valor $r_0 = 25$; y el incremento, $\Delta r = 0,5$.

(a) El incremento se calcula de $\Delta V(r_0) = V(r_0 + \Delta r) - V(r_0)$

$\Delta V(25) = V(25 + 0,5) - V(25)$ $=V(25,5) - V(25)$ $=\frac{2\pi}{3}(25,5)^3 - \frac{2\pi}{3}(25)^3$ $=2003,027\ cm^3$.

En consecuencia, para confeccionar el recipiente se necesita $2003,027\ cm^3$ de material.

b) La derivada del volumen será $\frac{dV(r)}{dr} = 2\pi r^2$.

El diferencial se calcula de $dV(r_0) = \frac{dV(r_0)}{dr} \cdot dr$ $=2\pi(25)^2 dr$

$dV(25) = \frac{dV(25)}{dr} \cdot dr = 2\pi(25)^2(0,5) = 1963,49\ cm^3$.

Es decir, para confeccionar el recipiente se necesita aproximadamente $1963,49\ cm^3$ de material.

c) Comparando ambos resultados, existe un error de $39,537\ cm^3$.

Ejemplo 3. Con una capa de pintura de un milímetro de espesor, se desea pintar el exterior de una cisterna que tiene forma cuadrada con 3 metros de arista externa. Dicha cisterna posee tapa. Haciendo uso de incrementos, hallar la cantidad de pintura a emplear. Asimismo, utilizando diferenciales, aproximar la cantidad de pintura que se empleará.

Solución.

Siendo $\boldsymbol{x}$ la longitud de la arista externa, la función para hallar el volumen de la cisterna será $\boldsymbol{V(x) = x^3}$; el valor de $\boldsymbol{x_0 = 3}$; y el incremento, $\boldsymbol{\Delta x = 0,002}$.

(a) El incremento se calcula de $\boldsymbol{\Delta V(x_0) = V(x_0 + \Delta x) - V(x_0)}$

$$\boldsymbol{\Delta V(3) = V(3 + 0,002) - V(3) = V(3,002) - V(3) = (3,002)^3 - (3)^3 = 0,054036\ m^3}.$$

Esto significa que para pintar la cisterna se necesita $\boldsymbol{0,054036\ m^3}$ de pintura.

(b) La derivada del volumen será $\boldsymbol{\frac{dV(x)}{dx} = 3x^2}$.

El diferencial se calcula de $\boldsymbol{dV(x_0) = \frac{dV(x_0)}{dx} dx}$.

$$\boldsymbol{dV(3) = \frac{dV(3)}{dr} \cdot dr = 3(3)^2(0,002) = 0,054\ cm^3}$$

Entonces, para pintar la cisterna se necesita aproximadamente $\boldsymbol{0,054\ cm^3}$ de pintura.

Notamos que, en este caso, los dos resultados son bastante cercanos.

Ejemplo 4. Se sabe que con el aumento de temperatura en el funcionamiento del procesador en determinadas placas cuadradas para circuitos impresos, se produce una dilatación lineal de sus lados, del 0,4 %. El lado de cada placa mide 7 mm. Calcular aproximadamente el aumento en su área.

Solución.

Siendo $\boldsymbol{x}$ el lado de la placa, la función que modela su área será $\boldsymbol{A(x) = x^2}$.

El incremento de cada lado resulta el 4% de 7 mm: $\boldsymbol{\Delta x = dx = 0,028\ mm}$.

Aproximando el incremento: $\boldsymbol{dA(x) = 2x}$.

Con los datos $\boldsymbol{dA(7) = 2(7)(0,028) = 0,392\ mm^2}$.

Siendo el área $\boldsymbol{A(7) = 49\ mm^2 = 100\ \%}$ y al área aumentada de $\boldsymbol{0,392}$, entonces el aumento será $\boldsymbol{y = \frac{(0,392)(100)}{49}\ \% = 0,8\ \%}$. Es decir, el área aumenta aproximadamente un $\boldsymbol{0,8\ \%}$.

3.10. LISTADO DE EJERCICIOS PROPUESTOS

EJERCICIOS SOBRE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN REAL.

1. DERIVAR LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

a) $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}$ b) $g(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[3]{3}$

c) $h(x) = \frac{x}{n} + \frac{n}{x} + \frac{x^2}{m^2} - \frac{m^2}{x^2}$

d) $f(t) = \frac{1}{10t^{2/3}} - \frac{5,2}{t^{1,4}} + \frac{2,5}{\sqrt[3]{t}}$

e) $g(x) = \frac{t^2-5t-1}{t^3}$, y hallar $g'(1/2)$

f) $f(x) = (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^2)$

g) $h(x) = 4 - 5x + 2x^3 - x^{-3}$, y mostrar que $f'(a)$ es igual a $f'(-a)$.

h) $y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$

i) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$

j) $y = \frac{x+1}{x-1}$

k) $y = \frac{x^2+1}{3(x^2-1)}$

l) $y = \frac{2t-3}{t^2-3t+6}$

m) $y = \frac{1}{t^2+t+1}$

n) $f(t) = \frac{3}{5-t} + \frac{t-5}{3}$, y hallar $f'(0)$ y $f'(2)$

o) $g(t) = (3x^2 - 4x^{-1} + 6)^3$

p) $y = \left(\frac{1}{2x-3}\right)^3$

q) $y = \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$

r) $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{x^2+1}}$

2. DERIVAR LAS SIGUIENTES FUNCIONES:

a) $y = Log(x - Cos\, x)$

b) $g(t) = e^{Cos\, t} Sen\, t$

c) $h(t) = Sen(2t) \cdot Sen\,(t/2)$

d) $T(t) = 3\, Cos^2 t - \frac{1}{Cos^2 t}$

e) $y = Arctan\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

f) $y = \frac{2Sen\, x}{Cos(2x)} - \frac{Cos\, x}{Sen(2x)}$

g) $y = \frac{1}{x}\left(Tan\left(\frac{x}{2}\right) + Cot(x/2)\right)$

h) $y = t \cdot Arctan(\sqrt{t})$

i) $y = x \cdot Arcsen(Ln\, x)$

j) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - Sen^2 x}}$

k) $g(x) = \frac{Ln(Sen\, x)}{Ln(Cos\, x)}$

l) $h(x) = 2^{\left(\frac{x}{Ln\, x}\right)}$

m) $g(x) = 10^{x \cdot tan\, x}$

n) $y = Ln[e^x Cos\, x]$

EJERCICIOS SOBRE DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR.

1. DERIVAR LAS SIGUIENTES FUNCIONES PARA HALLAR LO QUE SE PIDE:

a) y'', si $y = (1 - 3x^2)^2$

b) $f''(2)$, si $f(t) = (t + 10)^2$

c) $y^{(4)}$, si $y = x^2 \text{Ln } x$

d) $f'(1)$, si $f(x) = Arctan\, x$

e) y'', si $y = x^2 e^x$

f) y'', si $y = \sqrt{a^2 - x^2}$

g) y'', si $y = Arcsen[a + Sen\ x]$

h) $y^{(n)}$, si $y = e^{-x}$

i) $y^{(n)}$, si $y = x\ Lnx$

j) y'', si $y^3 + x^2 = ax^2y$

k) y'', si $e^{x+y} = x^2y^2$

l) $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$, siendo: (i) $x = at^2, y = bt^3$ (ii) $x = aCos(t), y = bSen(t)$

(iii) $x = ArcSen(t), y = Ln(1-t^2)$

EJERCICIOS SOBRE DERIVADA IMPLÍCITA.

1. Hallar la derivada de y, la cual es dada en forma implícita.

a) $x^{1/2} + y^{1/2} = 1$

b) $xy + Ln(xy) = x + y$

c) $x^2 + y^3 + axy = 0$

d) $y^2Cos\ x = xSen(3y)$

e) $Sen(xy) + Cos(xy) = Ln(x + y)$

f) $y = 1 - xe^y$

g) $y\ Sen\ x - Cos(x - y) = x - y$

h) $y - x = Arsen(x) - Arccos(y)$

i) $x^y - y^x = 10$

j) $y = x^{\ln x}$

k) $xy^2 = [Ln\ x]^y$

2. Hallar la derivada de y con respecto a x: $\frac{dy}{dx}$.

a) $x = aCos(t), y = aSen(t)$.

b) $x = 1-t^2, y = t-t^3$.

c) $= t[1 - Sen(t)]\ , y = t[Cos(t)]$.

EJERCICIOS SOBRE INCREMENTO Y DIFERENCIAL DE UNA **FUNCIÓN**.

1. Encuentre el incremento de y, Δy. Luego determine el diferencial de y, dy para la función $y = f(x)$, siendo:

a) $f(x) = x^3 + 1$, cuando x cambia de 2 a 2,01.

b) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, cuando x cambia de 3 a 2,9.

c) $f(x) = \sqrt{4 - x}$, cuando $x_0 = 2$ e $\Delta x = 0{,}2$.

2. ¿Cuál es el volumen aproximado de hule que se usa para manufacturar una pelota con diámetro de 4 centímetros, si el grueso del hule es de 1milímetro?

3. Los lados de una caja cúbica hueca de metal tienen un espesor de $\frac{1}{3}$ de milímetro. Si el volumen interior de la caja es de 125 centímetros cúbicos, ¿cuál es el volumen aproximado del metal que se emplea en la construcción de la caja?

4. Supongamos que explotara x libras de cierto material de fisión, con una fuerza equivalente a $500x$ toneladas de TNT. ¿Cuál es el error permisible en la medición de 2 libras del material si el error en la explosión resultante no debe sobrepasar el equivalente de una tonelada de TNT?

5. Hallar la diferencial de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 1 + 5x - x^2$

b) $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

c) $f(x) = (x - x^2)^2$

d) $f(x) = e^{2-x}$

e) $f(x) = Ln(4 - x^2)$

f) $f(x) = Sen(1 + \ln x)$